Uguaglianza di Parseval

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Teorema 1 *(Uguaglianza di Parseval)*
Se $V(t)$ è una funzione sviluppabile in integrale di Fourier:

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (j = \sqrt{-1}), \tag{1}$$

si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{V}(\omega)\right|^2 d\omega \tag{2}$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) V(t)^* dt, \tag{3}$$

dove $*$ denota l'operazione di coniugazione complessa. Immettendo nell'ultimo integrale gli sviluppi di Fourier di $V(t)$ e $V(t)^*$ rispettivamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{V}(\omega) e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \hat{V}(\omega')^* e^{-j\omega' t} \tag{4}$$

Invertendo l'ordine di integrazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{V}(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \hat{V}(\omega')^* \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{j(\omega-\omega')t} \tag{5}$$

Per determinare il terzo integrale a secondo membro, scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{j(\omega-\omega')t} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{6}$$

avendo definito

$$f(t) = e^{j\omega t},$$

che fisicamente rappresenta un'oscillazione sinusoidale di pulsazione ω, per cui l'integrale a secondo membro della (6) altro non è che la trasformata di Fourier della $f(t)$. Tuttavia, tale trasformata non esiste come funzione, ma esiste come distribuzione. Precisamente:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega - \omega') \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{j(\omega-\omega')t} = \sqrt{2\pi}\delta(\omega - \omega')$$

dove $\delta(.)$ è la funzione delta di Dirac. Questo è un risultato intuitivamente ovvio, giacché $f(t)$ ha come unica componente sinusoidale sè stessa (di pulsazione ω).

Segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{V}(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \hat{V}(\omega')^* \delta(\omega' - \omega)}_{=\hat{V}(\omega)^*}, \tag{7}$$

onde l'asserto. ■

Esercizio 2 *Verificare il teorema appena dimostrato per il seguente segnale:*

$$V(t) = \begin{cases} V_0, & se\ t \in [-\tau, \tau] \\ 0, & altrimenti \end{cases} \tag{8}$$

Soluzione
La trasformata di Fourier di $V(t)$ è:

$$\begin{aligned} \hat{V}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\, e^{-j\omega t} dt = \frac{V_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{j\omega}\right) \left(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

Cioè

$$\hat{V}(\omega) = \frac{2V_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \tag{9}$$

Nelle figg. 1-2 riportiamo i grafici di $V(t)$ e di $\hat{V}(\omega)$ rispettivamente.

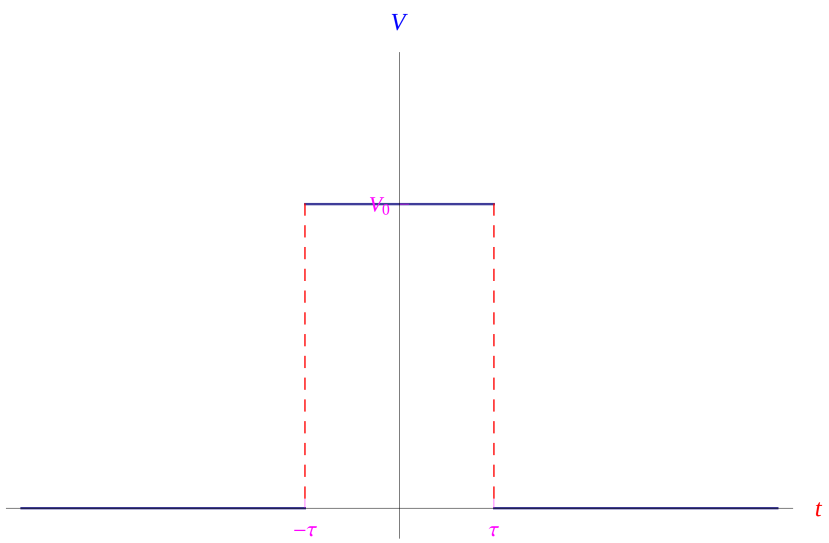

Figura 1: Andamento del segnale $V(t)$.

Ciò premesso, verifichiamo

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |V(t)|^2 dt}_{I_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{V}(\omega)\right|^2 d\omega}_{I_2} \tag{10}$$

Il primo integrale è banale:

$$I_1 = 2V_0^2 \tau$$

Quindi passiamo al secondo:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{4V_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega\tau}{\omega^2} d\omega = \frac{2V_0^2 \tau}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \omega\tau}{(\omega\tau)^2} d(\omega t)}_{=\pi} \\ &= 2V_0^2 \tau = I_1 \end{aligned}$$

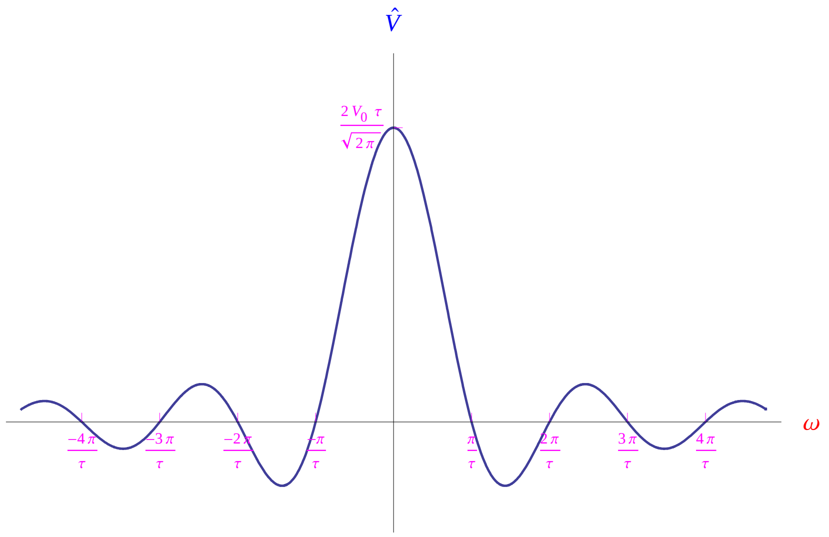

Figura 2: Andamento della trasformata di Fourier di $V(t)$.