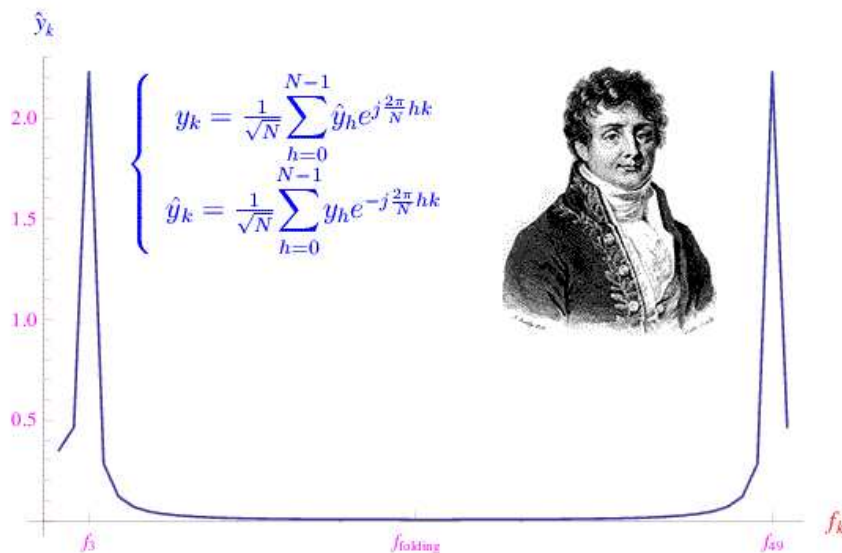


Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x) dx \quad \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

La trasformata discreta di Fourier in ambiente Mathematica

Marcello Colozzo



Indice

1	Campionamento di un segnale	2
1.1	Aliasing	2
2	La trasformata discreta di Fourier (DFT)	10
2.1	Troncamento di un segnale	10
2.2	Campionamento di un segnale troncato	12
2.3	Cenni sull'algoritmo FFT	17

Capitolo 1

Campionamento di un segnale

1.1 Aliasing

Sia dato un segnale rappresentato da una funzione $y(t)$ continua a tratti in $(-\infty, +\infty)$ ed ivi assolutamente sommabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)| dt < +\infty \quad (1.1)$$

In tali ipotesi, $y(t)$ ammette lo sviluppo in integrale di Fourier:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (j = \sqrt{-1}), \quad (1.2)$$

dove $\hat{y}(f)$ è la trasformata di Fourier, detta anche densità spettrale o semplicemente spettro di $y(t)$:

$$\hat{y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.3)$$

Passiamo dalla variabile continua t alla variabile discreta t_k così definita:

$$t_k = kT_c, \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (1.4)$$

essendo $T_c > 0$ l'intervallo di campionamento. Consideriamo ora un treno di impulsi di ampiezza u_0 :

$$U(t) = u_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c), \quad (1.5)$$

ovvero un insieme di infinite delte di Dirac centrate in kT_c , come illustrato in fig. 1.1

Si osservi che misurando U in Volt (V), l'ampiezza u_0 risulta espressa in $V \cdot s$ i.e. V / Hz , giacché la delta di Dirac ha le dimensioni dell'inverso del suo argomento. Lo spettro di $U(t)$ è:

$$\begin{aligned} \hat{U}(f) &= u_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= u_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= u_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f k T_c} \end{aligned} \quad (1.6)$$

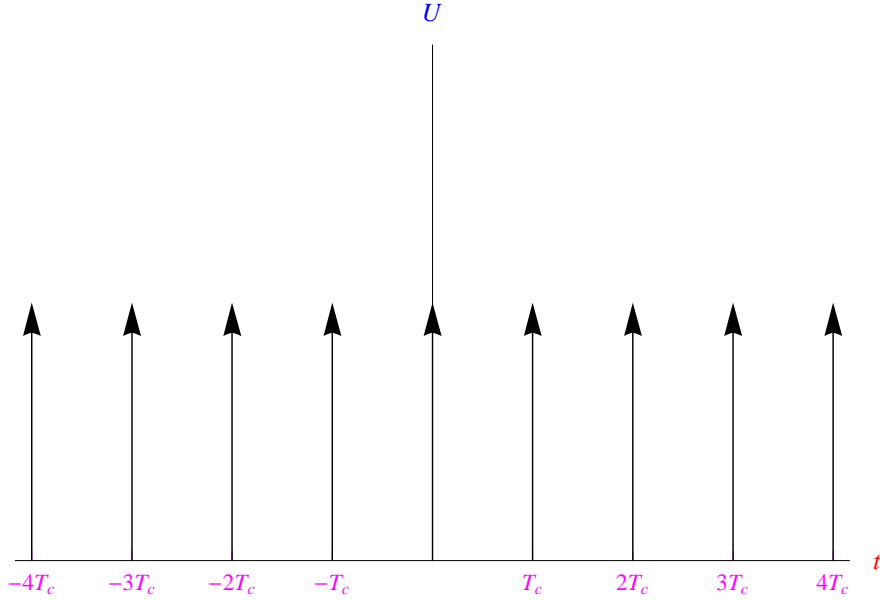


Figura 1.1: Rappresentazione grafica del treno di impulsi di ampiezza u_0 (eq. (1.5)).

Per esplicitare la sommatoria a secondo membro dell'ultimo termine, dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione 1

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{2k\pi}{T}t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Dimostrazione. Sia data la funzione

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), \tag{1.7}$$

periodica di periodo T . Anziché scrivere lo sviluppo in serie di Fourier di $g(t)$ nella forma consueta:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j\omega_k t}, \quad (\omega_k = \frac{2k\pi}{T}), \tag{1.8}$$

scriviamolo come:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \tag{1.9}$$

cosicché i coefficienti di Fourier sono dati da

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{j\omega_k t} dt \tag{1.10}$$

Anche se la (1.7) non è una funzione nel senso ordinario del termine, supponiamo che la serie converga:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-j\omega_k t} \tag{1.11}$$

Per determinare i coefficienti c_k osserviamo che in $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ è $g(t) = \delta(t)$, onde:

$$c_k = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{j\omega_k t} dt}_{=1} = \frac{1}{T}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1.12)$$

Pertanto

$$g(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{2k\pi}{T}t}, \quad (1.13)$$

da cui l'asserto. ■

Nel caso in esame definiamo la *frequenza di campionamento* $f_c = T_c^{-1}$:

$$\hat{U}(f) = u_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\frac{2k\pi}{f_c}f} = u_0 f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c) \quad (1.14)$$

Ne consegue che lo spettro del treno di impulsi unitari ($u_0 = 1 \text{ V / Hz}$, eq. 1.5) è un treno di impulsi di ampiezza f_c centrati in kf_c (cfr. fig 1.2).

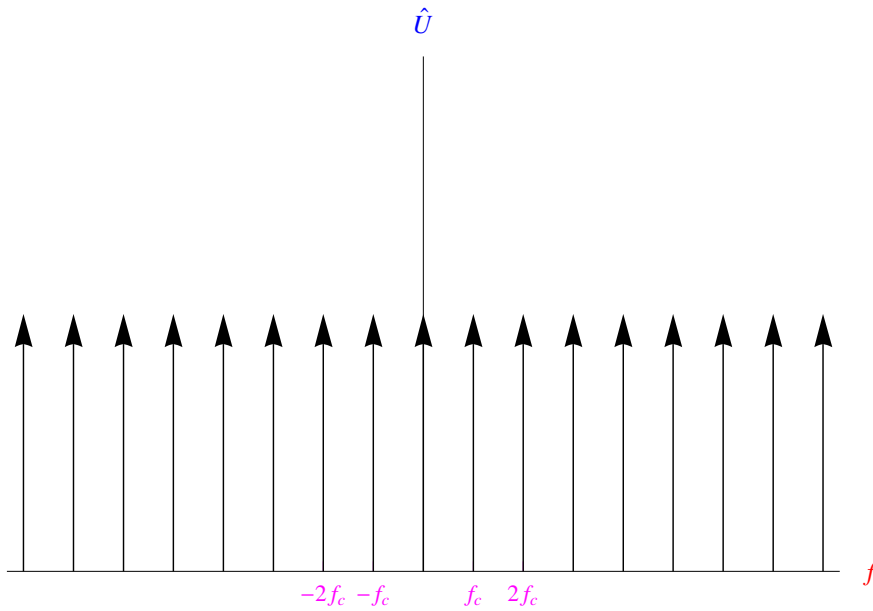


Figura 1.2: Spettro del treno di impulsi rappresentati dall'eq. (1.5).

Ciò premesso, il campionamento del segnale $y(t)$ è

$$y_c(t) = y(t) U(t) = y(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) \quad (1.15)$$

Qui abbiamo posto $u_0 = 1 \text{ V / Hz}$. Segue

$$y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT_c) \delta(t - kT_c) \quad (1.16)$$

Ad esempio, supponiamo che $y(t)$ sia il segnale plottato in fig. 1.3. Un campionamento di ampiezza T_c restituisce il segnale graficato in fig. 1.4.

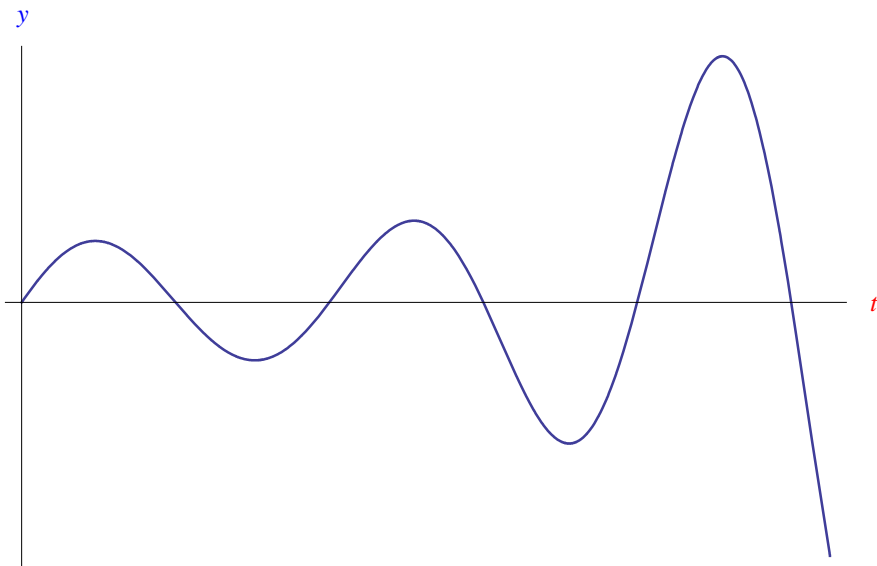


Figura 1.3: *Esempio di segnale $y(t)$.*

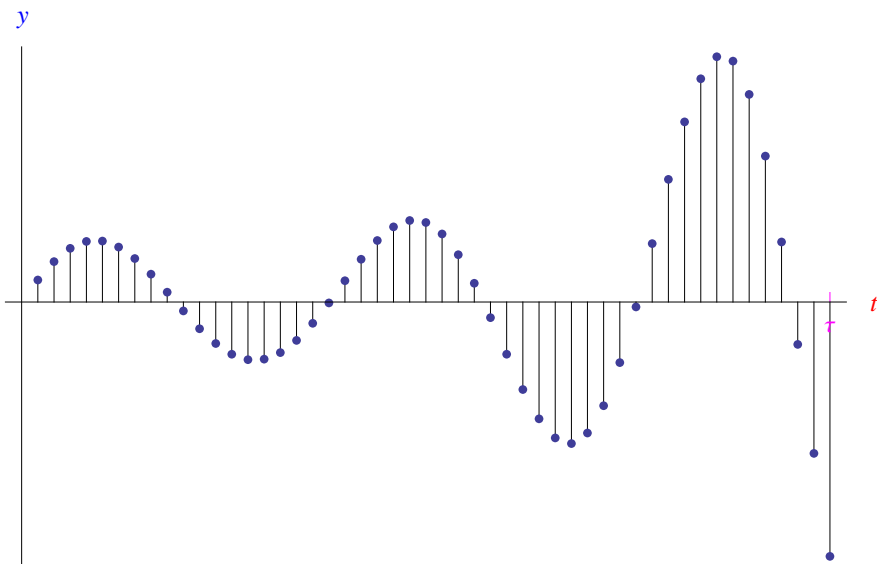


Figura 1.4: *Campionamento ideale del segnale di fig. 1.3*

Denotando con \mathcal{F} l'operazione che restituisce la trasformata di Fourier, abbiamo le seguenti relazioni simboliche:

$$\begin{aligned} y(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{y}(f) \\ U(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{U}(f) \end{aligned} \quad (1.17)$$

La trasformata di Fourier del segnale campionato è:

$$\hat{y}_c(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) U(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Come è noto:

$$y(t) U(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{y}(f) * \hat{U}(f),$$

dove $*$ denota il prodotto di convoluzione:

$$\hat{y}(f) * \hat{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\xi) \hat{U}(f - \xi) d\xi \quad (1.18)$$

Quindi lo spettro di $y_c(t)$ è

$$\begin{aligned} \hat{y}_c(f) &= \hat{y}(f) * \hat{U}(f) = f_c \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\xi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c - \xi) d\xi \\ &= f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\xi) \delta(f - kf_c - \xi) d\xi}_{=\hat{y}(f - kf_c)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Cioè

$$\hat{y}_c(f) = f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{y}(f - kf_c) \quad (1.20)$$

L'argomento della sommatoria a secondo membro della (1.20), ossia il termine:

$$\hat{y}(f - kf_c) \quad (1.21)$$

per un assegnato k , è una traslazione di $\hat{y}(f)$ nella direzione positiva ($k > 0$) o negativa ($k < 0$) dell'asse f e di ampiezza kf_c . Ne consegue che lo spettro del segnale campionato è il risultato di infinite traslazioni di $\hat{y}(f)$ lungo l'asse delle frequenze. Riferiamoci in particolare a un segnale limitato in banda, cioè:

$$\exists f_{\min}, f_{\max} \mid \hat{y}(f) \sim 0, \quad \forall f \notin [f_{\min}, f_{\max}] \quad (1.22)$$

In altri termini, il contributo dominante allo spettro del segnale proviene dalle frequenze appartenenti a un intervallo limitato $[f_{\min}, f_{\max}]$. Dal momento che la frequenza di campionamento f_c è l'ampiezza minima delle traslazioni di $\hat{y}(f)$ che generano lo spettro di $y_c(t)$, si ha che se è verificata la condizione:

$$f_c \geq \Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f_{\max} - f_{\min}, \quad (1.23)$$

le predette traslazioni non si sovrappongono. Se invece la condizione (1.23) è violata, cioè se

$$f_c < \Delta f,$$

le traslazioni si sovrappongono dando luogo al cosiddetto *aliasing*. Da un punto di vista formale sono interessanti i casi limite:

$$T_c \rightarrow 0^+ \implies f_c \rightarrow +\infty \quad (1.24)$$

e

$$T_c \rightarrow +\infty \implies f_c \rightarrow 0^+ \quad (1.25)$$

Il primo ricostruisce il segnale continuo, in cui vediamo che lo spettro viene traslato all'infinito, ovvero rimane identico a se stesso. Nel secondo, invece, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ lo spettro viene traslato con un'ampiezza nulla i.e. si sovrappone a se stesso infinite volte.

Riassumendo, siamo passati da un segnale $y(t)$ a un segnale campionato $y_c(t)$, e abbiamo dimostrato che lo spettro di $y_c(t)$ si ottiene traslando lo spettro di $y(t)$ di $k f_c = k/T_c$, per ogni k intero relativo.

Ad esempio, consideriamo un segnale sinusoidale modulato in ampiezza da una gaussiana (fig. 1.5):

$$y(t) = A e^{-\nu_0^2 t^2} \cos(2\pi f_0 t), \quad (\nu_0 > 0) \quad (1.26)$$

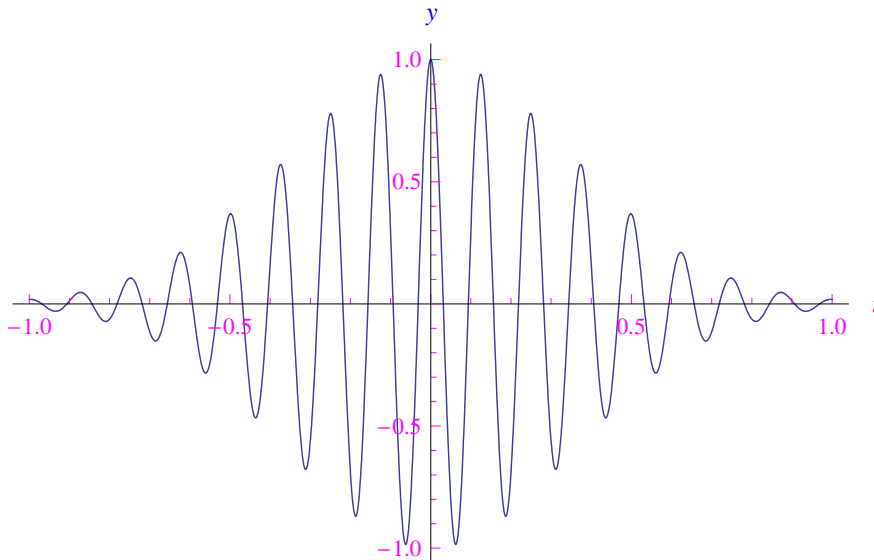


Figura 1.5: Esempio di segnale sinusoidale modulato in ampiezza da una gaussiana.

Abbiamo già calcolato [al seguente link](#) la trasformata di Fourier di un segnale simile. “Aggiustando” i vari termini, otteniamo:

$$\hat{y}(f) = \frac{A}{\nu_0 \sqrt{2}} e^{-\frac{\pi^2 (f-f_0)^2}{\nu_0^2}} \quad (1.27)$$

Troviamo quindi una gaussiana centrata in f_0 , come illustrato in fig. 1.6.

Si tratta dunque di un segnale a banda limitata, giacchè:

$$\hat{y}(f) \sim 0, \quad \forall f \notin [f_{\min}, f_{\max}], \quad (1.28)$$

dove

$$f_{\min} = f_0 - \nu_0, \quad f_{\max} = f_0 + \nu_0 \quad (1.29)$$

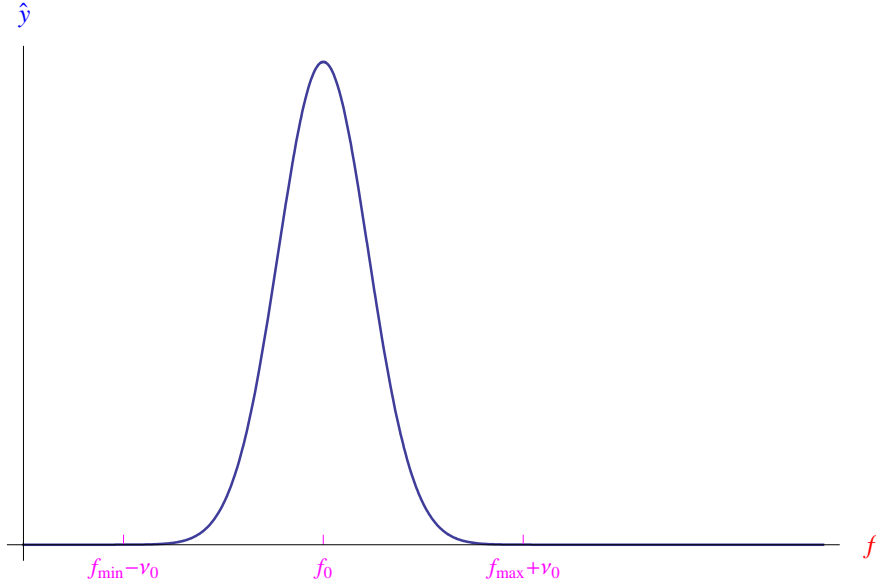


Figura 1.6: Spettro del segnale (1.26)

Eseguiamo un campionamento di $y(t)$:

$$y_c(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\nu_0^2 k^2 T_c^2} \cos(2\pi f_0 k T_c) \delta(t - k T_c) \quad (1.30)$$

Ad esempio, se $T_c = 10^{-4}$ s, $\nu_0 = 2$ Hz, $f_0 = 8$ Hz, otteniamo il campionamento illustrato in fig. 1.7.

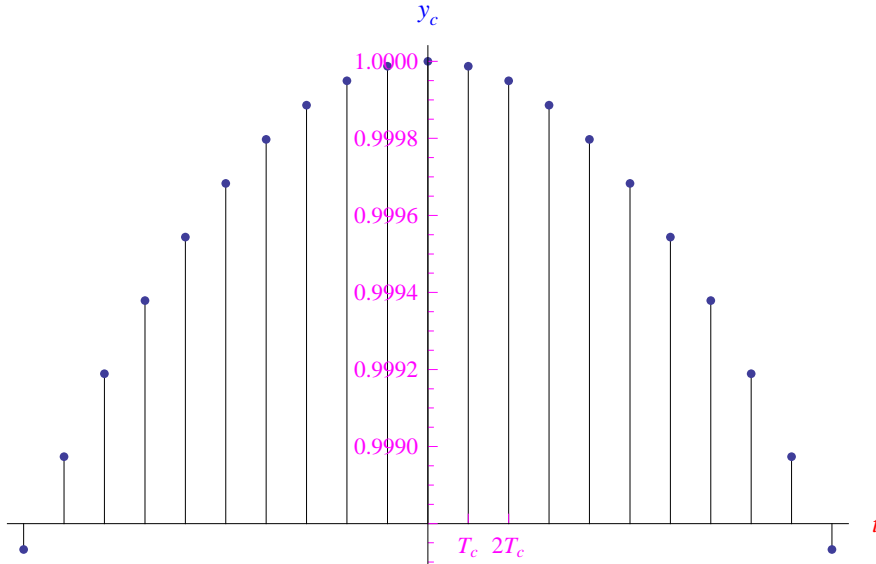


Figura 1.7: Campionamento del segnale (1.30) con $T_c = 10^{-4}$ s, $\nu_0 = 2$ Hz, $f_0 = 8$ Hz.

Ne consegue che lo spettro del segnale (1.30) è:

$$\hat{y}_c(f) = \frac{A f_c}{\nu_0 \sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 (f - k f_c - f_0)^2}{\nu_0^2}} \quad (1.31)$$

La frequenza di campionamento è $f_c = 10^4$ Hz, per cui la condizione (1.23) è abbondantemente verificata:

$$f_c = 10^4 \text{ Hz} > \Delta f = f_{\max} - f_{\min} = 2\nu_0 = 4 \text{ Hz}$$

Ciò implica l'assenza di aliasing. Proviamo ora a campionare con $T_c = 10$ s $\implies f_c = 10^{-1}$ Hz $< \Delta f$, plottando il corrispondente spettro in fig. 1.8 da cui vediamo che le traslazioni di ampiezza $f_0 \pm f_c$ si sovrappongono, generando aliasing.

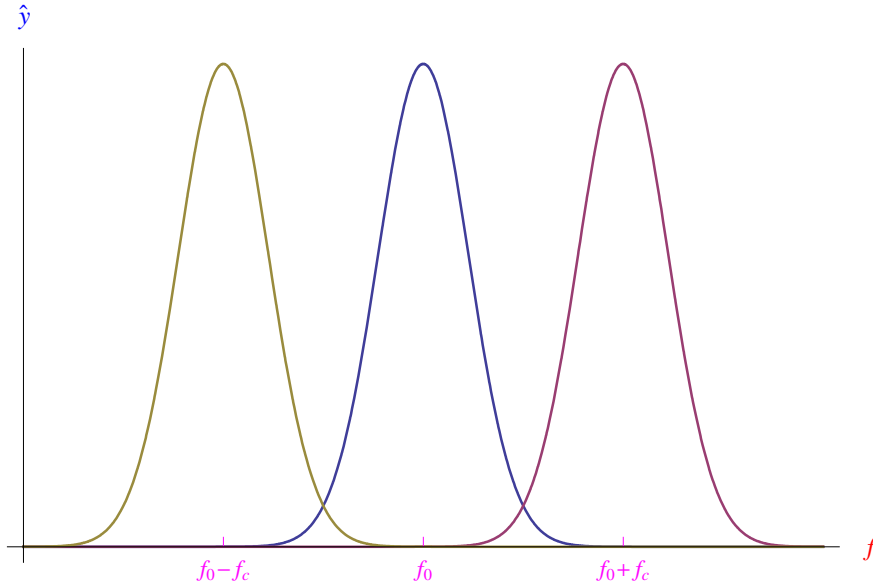


Figura 1.8: Spettro del segnale campionato (1.30) con $f_c = 10^{-1}$ Hz, $\nu_0 = 2$ Hz, $f_0 = 8$ Hz. Si notino le zone di sovrapposizione (aliasing), giacché $f_c < \Delta f$.

Capitolo 2

La trasformata discreta di Fourier (DFT)

2.1 Troncamento di un segnale

Il processo di campionamento di un segnale $y(t)$ esaminato nella sezione precedente è un campionamento di tipo ideale, in quanto si estende su tutto l'asse reale $(-\infty, +\infty)$. Infatti, l'estensione infinita dell'asse dei tempi implica l'infinità, sia pur numerabile, degli istanti discreti t_k . Tale circostanza distrugge la possibilità di utilizzare un calcolatore elettronico per eseguire un'analisi in frequenza del segnale campionato. Da qui la necessità di un processo di campionamento reale che sia in grado di restituire un numero finito di istanti discreti. È chiaro che ciò può essere realizzato solo troncando il segnale, ovvero moltiplicandolo per una *finestra temporale*:

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (2.1)$$

plottata in fig. 2.1.

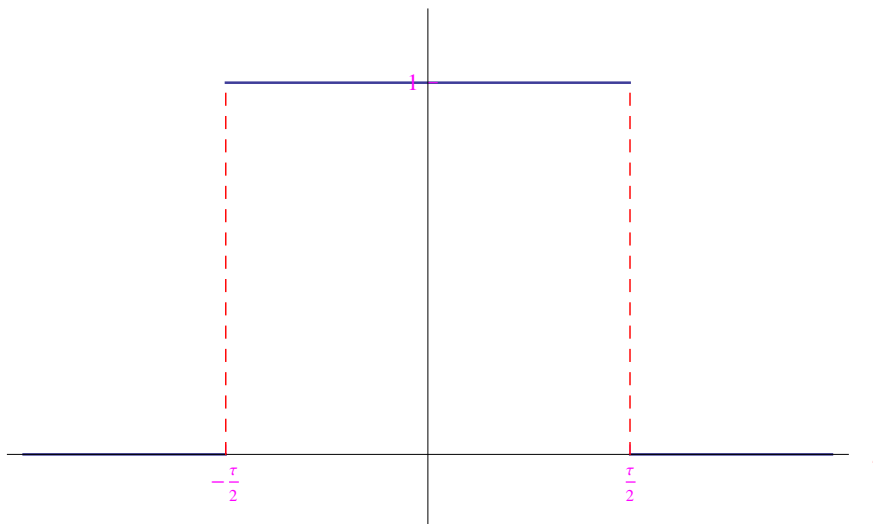


Figura 2.1: *Finestra temporale di durata τ .*

Il segnale troncato è:

$$y_\tau(t) = y(t) F_\tau(t) = \begin{cases} y(t), & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

Ciò implica

$$\hat{y}_\tau(f) = \hat{y}(f) * \hat{F}_\tau(f) \quad (2.3)$$

Ad esempio, sia $y(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ che in notazione complessa si scrive:

$$y(t) = A e^{j2\pi f_0 t} \quad (2.4)$$

Quindi

$$\hat{y}(f) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \quad (2.5)$$

Come è noto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkx} dx = 2\pi \delta(x)$$

Eseguendo il cambio di variabile $x = 2\pi t$ nell'integrale (2.5):

$$\hat{y}(f) = A \delta(f - f_0) \quad (2.6)$$

Come c'era da aspettarsi, lo spettro di $y(t)$ è una delta di Dirac centrata in f_0 . Il segnale troncato è:

$$y_\tau(t) = \begin{cases} A e^{j2\pi f_0 t}, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (2.7)$$

per cui

$$\hat{y}_\tau(f) = A \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$$

Cioè

$$\hat{y}_\tau(f) = \frac{A\tau \sin[\pi(f-f_0)\tau]}{2\pi(f-f_0)}, \quad (2.8)$$

L'andamento di $\hat{y}_\tau(f)$ è riportato in fig. 2.2.

Il troncamento determina una dispersione in frequenza quantificata da

$$\delta f = f_1 - f_{-1},$$

dove

$$f_k = f_0 + \frac{k}{\tau}, \quad (k \in \mathbb{Z} - \{0\})$$

sono gli zeri di $\hat{y}_\tau(f)$. Quindi

$$\delta f = \frac{2}{\tau}, \quad (2.9)$$

che è infinitesima nel limite di durata infinita, riproducendo il risultato (2.6).

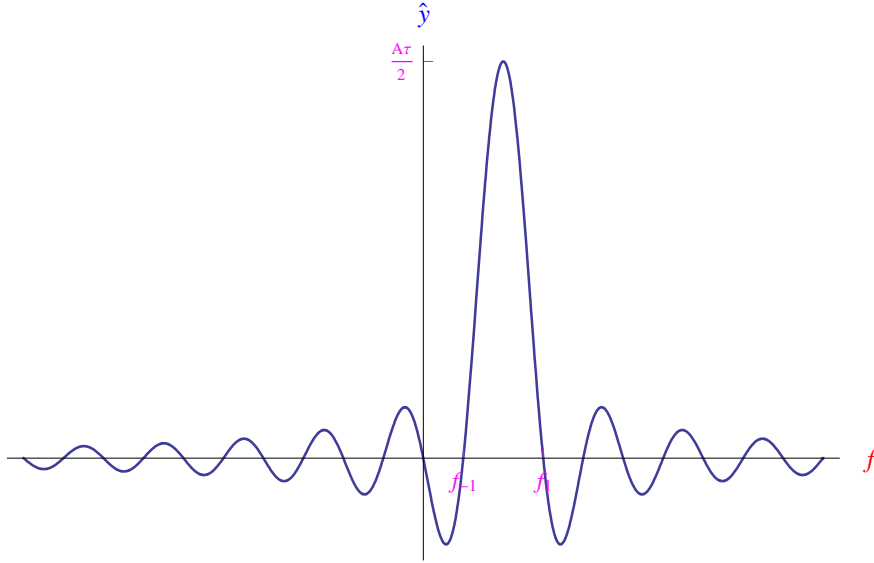


Figura 2.2: *Spettro del segnale troncato (2.2).*

2.2 Campionamento di un segnale troncato

Esenguiamo un troncamento di un segnale $y(t)$ utilizzando la finestra temporale:

$$F_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (2.10)$$

Fissiamo $N + 1$ istanti:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_N = \tau \quad (2.11)$$

Topologicamente la (2.11) è una decomposizione dell'intervallo chiuso $[0, \tau]$, nel senso che

$$[0, \tau] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [t_k, t_{k+1}] \quad (2.12)$$

$$[t_k, t_{k+1}] \cap [t_{k'}, t_{k'+1}] = \emptyset, \quad \forall k \neq k'$$

L'ampiezza della decomposizione (2.12) è:

$$\Delta = \max_{k \in \{0, 1, \dots, N-1\}} (t_{k+1} - t_k) \quad (2.13)$$

Per semplicità supponiamo che gli istanti (2.11) siano equispaziati, cosicché l'ampiezza (2.13) si identifica con il tempo di campionamento:

$$T_c = t_{k+1} - t_k = \frac{\tau}{N}, \quad (2.14)$$

per cui

$$t_k = kT_c = \frac{k}{N}\tau, \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (2.15)$$

Considerando nuovamente un treno di impulsi con $u_0 = 1 \text{ V / Hz}$:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - kT_c), \quad (2.16)$$

si ha il segnale troncato e campionato:

$$y_{\tau,c}(t) = y_{\tau}(t) U(t) = \sum_{k=0}^{N-1} y(kT_c) \delta(t - kT_c) \quad (2.17)$$

Lo spettro è

$$\begin{aligned} \hat{y}_{\tau,c}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\tau,c}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} y(kT_c) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) e^{-j2\pi ft} dt}_{e^{-j2\pi f k T_c}} \end{aligned}$$

Cioè

$$\hat{y}_{\tau,c}(f) = \sum_{k=0}^{N-1} y(kT_c) e^{-j2k\pi \frac{f}{f_c}} \quad (2.18)$$

In altri termini, lo spettro del segnale troncato e campionato è una combinazione lineare di esponenziali complessi. I coefficienti della combinazione sono le ampiezze dei singoli campioni. Oltre al già citato fenomeno dell'aliasing, si verifica una distorsione in frequenza dovuta al troncamento.

Sia nel caso del segnale campionato $y_c(t)$ che nel caso del segnale troncato e campionato $y_{\tau,c}(t)$, la frequenza varia con continuità da $-\infty$ a $+\infty$, e può essere discretizzata. L'algoritmo risultante che consente di passare dal dominio del tempo $t_k = kT_c$ al dominio delle frequenze f_k è noto con l'acronimo **DFT**: **D**iscrete **F**ourier **T**ransform, ovvero Trasformata Discreta di Fourier. Lasciando cadere i pedici τ, c , la discretizzazione (2.11) restituisce la sequenza di campioni:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_N, \quad (2.19)$$

dove $y_k = y(kT_c)$ con $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Da un punto di vista formale, possiamo ritenere la predetta sequenza periodica di periodo $\tau = NT_c$, cioè di frequenza

$$f_{\tau} = \frac{1}{NT_c} = \frac{f_c}{N} \quad (2.20)$$

Dobbiamo allora riscrivere la (2.18) dopo aver discretizzato la variabile continua f :

$$f \rightarrow f_k = kf_{\tau}, \quad (k = 0, 1, \dots, N - 1), \quad (2.21)$$

onde

$$f_k = \frac{k}{N} f_c, \quad (2.22)$$

dove abbiamo tenuto conto della (2.20). Risulta

$$\hat{y}_h = \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-j\frac{2\pi}{N} hk} \quad (2.23)$$

Qui è $\hat{y}_h = \hat{y}(f_h)$ con $h = 0, 1, \dots, N - 1$. La sequenza di numeri complessi

$$\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N, \quad (2.24)$$

definisce la DFT di $y_{\tau,c}(t)$, avendo ripristinato i pedici. Più precisamente, il numero complesso \hat{y}_k si chiama *componente spettrale di ordine k*. Nel caso continuo:

$$y_{\tau,c}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}_{\tau,c}(f) e^{-j2\pi ft} df, \quad (2.25)$$

la trasformata di Fourier $\hat{y}_{\tau,c}(f)$ ha le dimensioni di $y(t)$ diviso una frequenza, in quanto $\hat{y}_{\tau,c}(f)$ è una densità spettrale (ampiezza delle componenti spettrali per intervallo unitario di frequenza). Nel caso discreto, invece, la grandezza \hat{y}_k ha le stesse dimensioni di y ; ciò perchè \hat{y}_k non è una densità spettrale ma l'ampiezza della componente medesima. Invertendo la (2.23):

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \hat{y}_h e^{j\frac{2\pi}{N}hk} \quad (2.26)$$

È preferibile scrivere le (2.23)-(2.26) nella forma simmetrica:

$$\begin{cases} y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{N-1} \hat{y}_h e^{j\frac{2\pi}{N}hk} \\ \hat{y}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{h=0}^{N-1} y_h e^{-j\frac{2\pi}{N}hk} \end{cases} \quad (2.27)$$

Le componenti spettrali che forniscono un'informazione sulla distribuzione delle frequenze, sono quelle con $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$. Le rimanenti sono una conseguenza dell'aliasing. Dalla (2.22) segue che le frequenze significative sono:

$$f_1 = \frac{f_c}{N}, f_2 = \frac{2f_c}{N}, \dots, f_{N/2} = \frac{f_c}{2} \quad (2.28)$$

La frequenza

$$f_{N/2} = \frac{f_c}{2} \quad (2.29)$$

è detta *frequenza di folding*. Applichiamo queste nozioni allo studio del segnale:

$$y(t) = A e^{-\nu_0|t|} \sin(2\pi f_0 t), \quad (\nu_0 > 0) \quad (2.30)$$

Troncando il segnale con la finestra temporale (2.10) otteniamo l'andamento plottato in fig. 2.3

Assumiamo $\tau = 1$ s, dopodiché fissiamo $N = 50$ che a sua volta implica un tempo di campionamento $T_c = 2 \cdot 10^{-1}$ s. Il conseguente campionamento restituisce il grafico di fig. 2.4, dove abbiamo assunto $f_0 = 2$ Hz.

Dopo aver esplicitato i singoli campioni $y_k = y(kT_c)$ possiamo determinare la DFT. A tale scopo utilizziamo il software *Mathematica* che dispone del comando `Fourier[]` per il calcolo della DFT. In fig 2.5. plottiamo $|\hat{y}_k|$ in funzione di k , da cui vediamo un picco a $k = 3$, seguito da un picco speculare. La fig. 2.6 riporta un grafico simile, precisamente $|\hat{y}_k|$ in funzione di f_k . Come ci si aspettava il contributo dominante al segnale proviene dalla frequenza

$$f_3 = \frac{3}{50} f_c = \frac{3}{50} \cdot \frac{50}{1} = 3 \text{ Hz} \sim f_0 \quad (2.31)$$

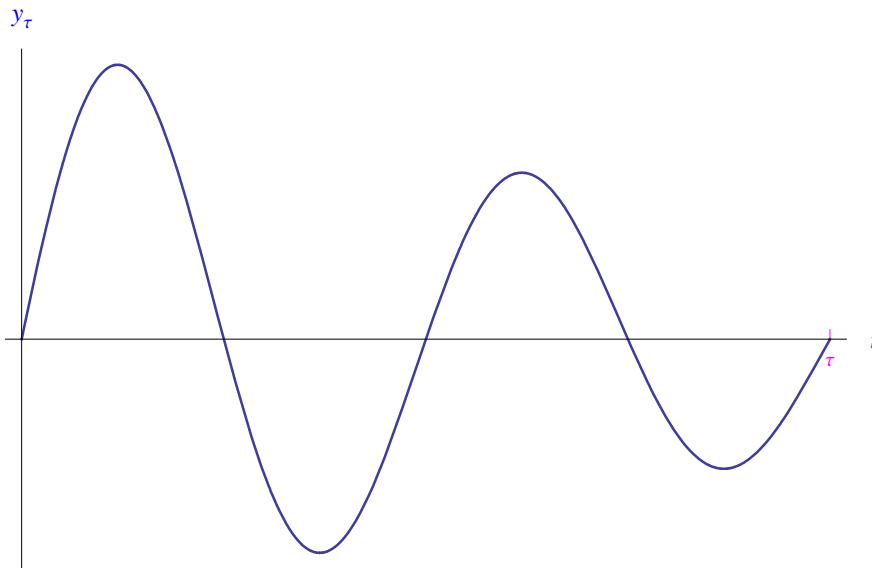


Figura 2.3: Troncamento del segnale (2.30).

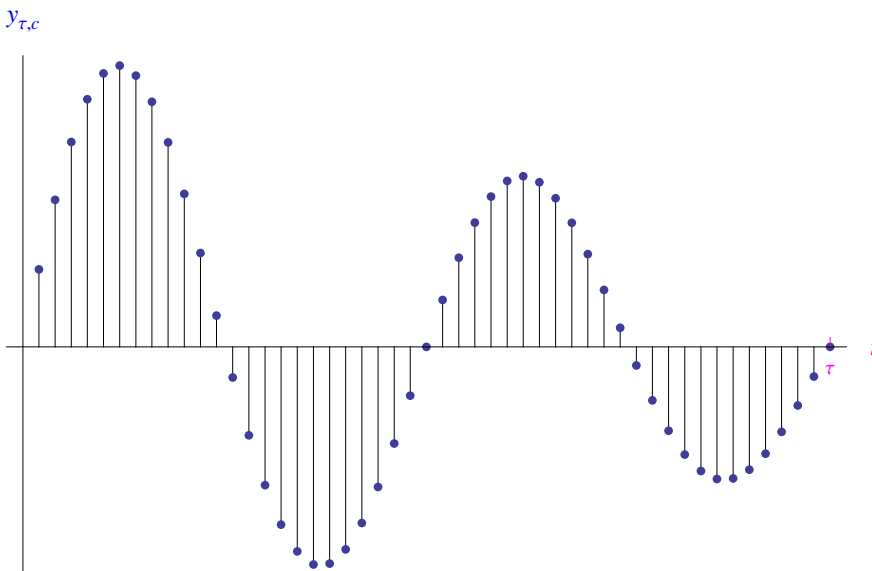


Figura 2.4: Segnale (2.30) troncato e campionato. Il troncamento è a $\tau = 1$ s, mentre i rimanenti parametri sono: $\nu_0 = 1$ Hz, $f_0 = 2$ Hz. Il numero di intervalli parziali è $N = 50$, per cui il tempo di campionamento è $T_c = 2 \cdot 10^{-1}$ s.

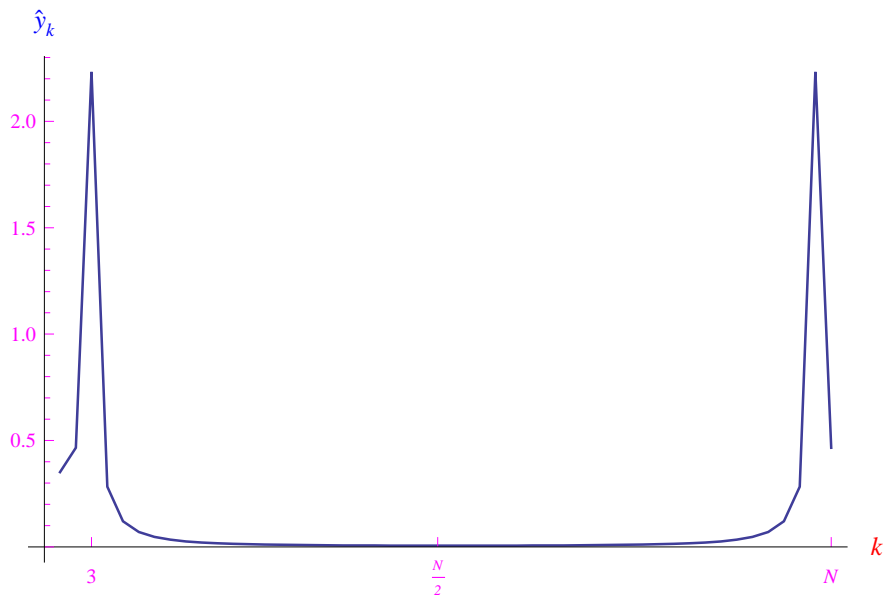


Figura 2.5: Spettro (in funzione di k) ottenuto tramite DFT del segnale (2.3).

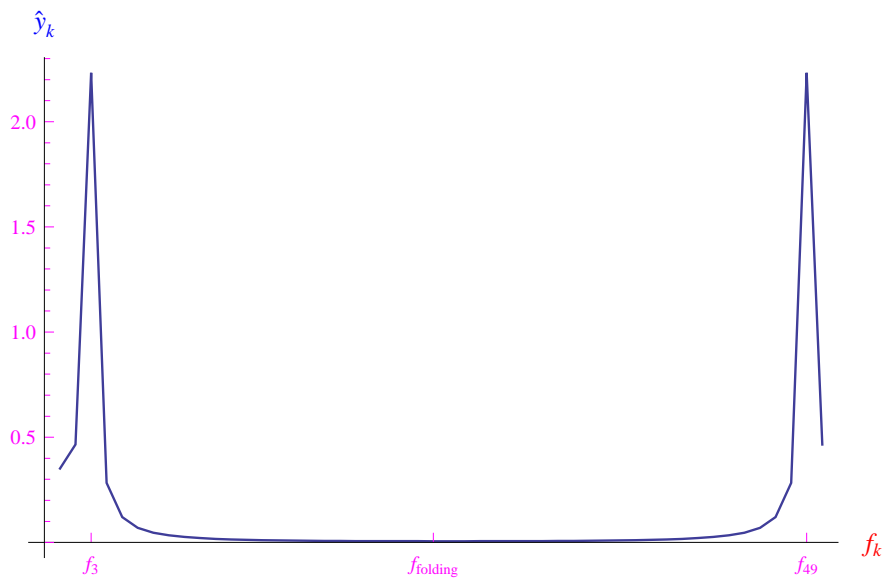


Figura 2.6: Spettro (in funzione di k) ottenuto tramite DFT del segnale (2.3).

2.3 Cenni sull'algoritmo FFT

A partire dalle (2.27) definiamo i seguenti vettori appartenenti allo spazio vettoriale \mathbb{C}^N :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \\ \dots \\ \hat{y}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Dalla seconda delle (2.27)

$$\hat{y}_k = \sum_{h=0}^{N-1} \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}hk}}{\sqrt{N}} y_h, \quad (2.33)$$

segue

$$\hat{\mathbf{y}} = M^{(N)} \mathbf{y}, \quad (2.34)$$

dove $M^{(N)}$ è la seguente matrice quadrata di ordine N :

$$M^{(N)} = \left(M_{hk}^{(N)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{1}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}}}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}}}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)}}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}}}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{8\pi}{N}}}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{e^{-j\frac{4\pi}{N}(N-1)}}{\sqrt{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)}}{\sqrt{N}} & \frac{e^{-j\frac{8\pi}{N}(N-1)}}{\sqrt{N}} & \dots & \frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)^2}}{\sqrt{N}} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Ad esempio, per $N = 2$:

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-j\pi}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-j\pi}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_0}{\sqrt{2}} + \frac{y_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{2}} - \frac{y_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

Il calcolo della DFT richiede dunque la moltiplicazione righe per colonne di una matrice quadrata di ordine N con un vettore colonna a N componenti, richiedendo un numero di operazioni dell'ordine di N^2 . Si comprende allora l'elevato costo computazionale dell'algoritmo DFT quando si ha un elevato numero di campioni. Per alleggerire il carico computazionale sono stati sviluppati vari algoritmi noto sotto l'acronimo FFT, riducendo il numero di operazioni a $O(N \ln N)$.