Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

Consideriamo un punto materiale di massa m sottoposto a n forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ..., \mathbf{F}_n$. Per il secondo principio della dinamica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

dove $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$ è la risultante delle forze applicate, mentre $\mathbf{a}$ è l'accelerazione del punto materiale. Il lavoro svolto dalla predetta risultante per spostare il punto lungo un cammino γ di estremi A e B, è

$$\begin{aligned} L &= \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\gamma(A,B)} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \right) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{n} L_k, \end{aligned}$$

essendo

$$L_k = \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{s}$$

è il lavoro eseguito dalla k*-esima* forza. Ne concludiamo che il lavoro eseguito dalla risultante $\mathbf{F}$ è la somma algebrica dei lavori compiuti dalle singole forze $\mathbf{F}_k$. Riguardo al segno, se $L > 0$ significa che la risultante forma un angolo acuto con il vettore spostamento. Fisicamente, è il corpo che "subisce" il lavoro da parte dell'ente che sviluppa la forza $\mathbf{F}$. Se $L < 0$ la risultante forma un angolo ottuso con lo spostamento, ed è il predetto ente a subire il lavoro svolto dalla reazione presentata dal corpo.

Definizione 1 *Se il punto materiale si muove con velocità* $\mathbf{v}$*, la grandezza*

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

si chiama **energia cinetica** *del punto materiale.*

Teorema 2 *(***Teorema del lavoro e dell'energia cinetica***)*
Il lavoro eseguito dalla risultante delle forze agenti su un punto materiale è pari alla corrispondente variazione di energia cinetica.

Dimostrazione. Se $\mathbf{F}$ è la risultante delle forze agenti su un punto materiale di massa m, per il secondo principio della dinamica:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

per cui il lavoro elementare è

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \underset{d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt}{=} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \tag{1}$$

D'altra parte

$$\frac{d}{dt} \left(v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

Quindi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(v^2 \right)$$

Sostituendo nella (1)

$$dL = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(v^2 \right) dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = dT,$$

onde l'asserto:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dT = T_2 - T_1, \qquad (T_1 = T(t_1), \ T_2 = T(t_2)) \tag{2}$$

■

Dal teorema appena dimostrato si ha che se $T_2 > T_1$, significa che l'aumento di energia cinetica è pari al lavoro $L > 0$ eseguito dalla forza. Viceversa, se l'energia cinetica diminuisce. Ad esempio, supponiamo che nell'istante t_1 la velocità del punto materiale sia v_1. Se agisce una forza contrastante il moto, ci sarà un istante di arresto t_2 i.e. tale che $v(t_2) = 0$. Segue

$$L = T_2 - T_1 = -T_1 = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

L'energia cinetica è la capacità di un punto materiale a compiere lavoro, in virtù di possedere una velocità $\mathbf{v}$. Per quanto riguarda il lavoro svolto, ciò che conta è la variazione in modulo della velocità e non in direzione. Ad esempio, se il punto materiale compie un moto circolare uniforme, la variazione di energia cinetica è nulla e la forza centripeta non compie lavoro (incidentalmente, tale forza è costantemente ortogonale al vettore spostamento infinitesimo). Se R è il raggio della traiettoria circolare, la velocità scalare è

$$v = \omega R,$$

essendo ω la frequenza angolare. L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega^2 = \text{costante} \tag{3}$$

dove $\mathcal{I} = mR^2$ è il momento d'inerzia della particella rispetto al centro della traiettoria.

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I.* Veschi