Teorema 1 (**Teorema di Green**)

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare rispetto all'asse y. Se la funzione f è continua in D assieme alla derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$, si ha:

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \oint_{+\partial D} f(x, y)\, dy \tag{1}$$

Se, invece, D è un dominio regolare rispetto all'asse x e la funzione $g(x, y)$ è continua in D assieme alla derivata $\frac{\partial g}{\partial y}$, si ha:

$$\iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdy = -\oint_{+\partial D} g(x, y)\, dx \tag{2}$$

Dimostrazione. Osserviamo che gli integrali di circuitazione

$$\oint_{+\partial D} f(x, y)\, dy, \quad \oint_{+\partial D} g(x, y)\, dx,$$

sono manifestamente integrali curvilinei di forma differenziale lineari. La prima forma è $f(x, y)\, dy$ per cui è nullo il coefficiente in dx, mentre nella seconda forma è nullo il coefficiente in dy. Ciò premesso, iniziamo con il dimostrare la (1) assumendo D dominio normale rispetto all'asse y (cfr. fig. 1):

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \le x \le \beta(y), \quad a \le y \le b\right\} \tag{3}$$

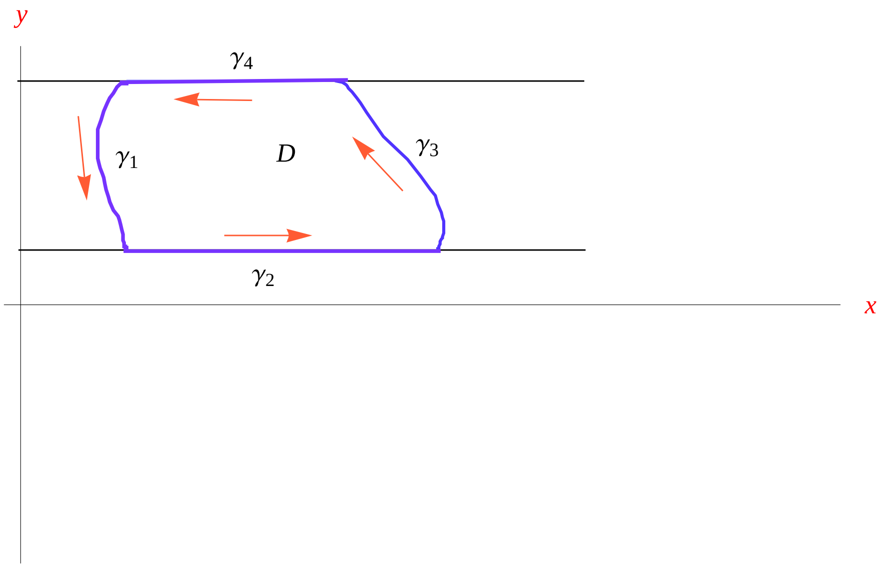

Figura 1: Dominio (3).

Per le formule di riduzione per gli integrali doppi:

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy &= \int_a^b dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx \\ &= \int_a^b \{f[\beta(y), y] - f[\alpha(y), y]\}\, dy \\ &= \int_a^b f[\beta(y), y]\, dy + \int_b^a f[\alpha(y), y]\, dy\end{aligned} \tag{4}$$

Calcoliamo ora l'integrale di circuitazione a secondo membro della (1). Nel caso in esame (cfr. fig. 1) è:

$$\partial D = \bigcup_{k=1}^{4} \gamma_k \Longrightarrow \oint_{+\partial D} f(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{4} I_k, \tag{5}$$

dove

$$I_k = \int_{\gamma_k} f(x,y)\,dy, \tag{6}$$

mentre i cammini di integrazione sono:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : x = \alpha(t), \ y = t, \quad b \geq t \geq a, \\
&\gamma_2 : x = t, \ y = a, \quad \alpha(a) \leq t \leq \beta(a), \\
&\gamma_3 : x = \beta(t), \ y = t, \quad a \leq t \leq b, \\
&\gamma_4 : x = t, \ y = b, \quad \beta(b) \geq t \geq \alpha(b)
\end{aligned} \tag{7}$$

Segue

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} f(x,y)\,dy = \int_b^a f[\alpha(t), t]\,dt \\
I_2 &= \int_{\gamma_2} f(x,y)\,dy = 0 \\
I_3 &= \int_{\gamma_3} f(x,y)\,dy = \int_a^b f[\beta(t), t]\,dt \\
I_4 &= \int_{\gamma_4} f(x,y)\,dy = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Sommando

$$\oint_{+\partial D} f(x,y)\,dy = \int_b^a f[\alpha(t), t]\,dt + \int_a^b f[\beta(t), t]\,dt,$$

cioè la (4). Dimostriamo ora la (2) per D dominio normale rispetto all'asse x (cfr. fig. 2):

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \right\} \tag{9}$$

Per le formule di riduzione degli integrali doppi:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dxdy &= \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial g}{\partial y} dy \\
&= \int_a^b \{ g[x, \beta(x)] - g[x, \alpha(x)] \}\,dx \\
&= -\int_b^a g[x, \beta(x)]\,dx - \int_a^b g[x, \alpha(x)]\,dx
\end{aligned} \tag{10}$$

Calcoliamo ora l'integrale di circuitazione a secondo membro della (2). Nel caso in esame (cfr. fig. 2) è:

$$\partial D = \bigcup_{k=1}^{4} \gamma_k \Longrightarrow \oint_{+\partial D} g(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{4} J_k, \tag{11}$$

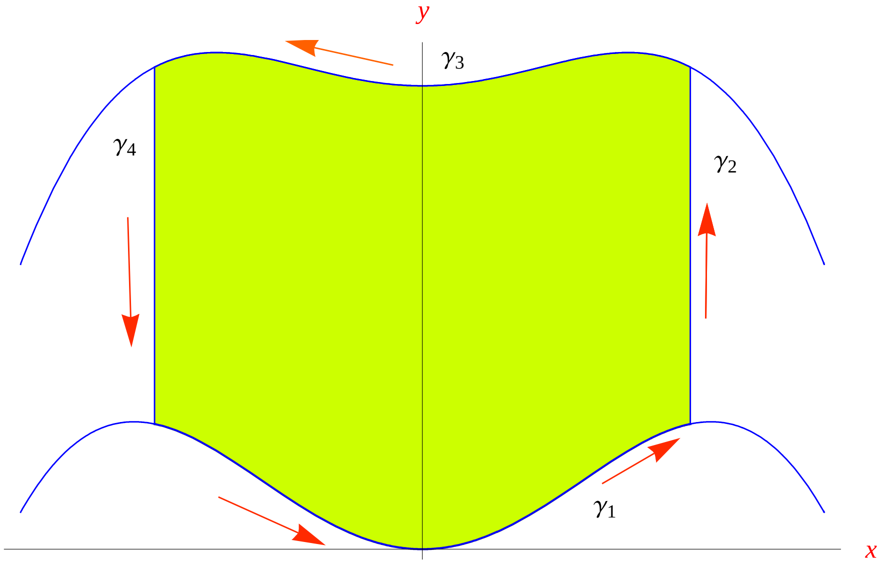

Figura 2: Dominio (9).

dove

$$J_k = \int_{\gamma_k} g\left(x, y\right) dy, \tag{12}$$

mentre i cammini di integrazione sono:

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : x = t,\ y = \alpha\left(t\right), \quad a \leq t \leq b, \\
&\gamma_2 : x = b,\ y = t, \quad \alpha\left(\beta\right) \leq t \leq \beta\left(b\right), \\
&\gamma_3 : x = t,\ y = \beta\left(t\right), \quad b \geq t \geq a, \\
&\gamma_4 : x = a,\ y = t, \quad \beta\left(a\right) \geq t \geq \alpha\left(a\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Segue

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\gamma_1} g\left(x, y\right) dx = \int_a^b g\left[t, \alpha\left(t\right)\right] dt \\
J_2 &= \int_{\gamma_2} g\left(x, y\right) dx = 0 \\
J &= \int_{\gamma_3} g\left(x, y\right) dx = \int_b^a g\left[t, \beta\left(t\right)\right] dt \\
J_4 &= \int_{\gamma_4} g\left(x, y\right) dx = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Sommando

$$\begin{aligned}
\oint_{+\partial D} g\left(x, y\right) dy &= \int_a^b g\left[t, \alpha\left(t\right)\right] dt + \int_b^a g\left[t, \beta\left(t\right)\right] dt \\
&= -\iint_D \frac{\partial g}{\partial y} dx dy
\end{aligned} \tag{15}$$

cioè la (4). Si tratta ora di dimostrare che la (1) (o la (2)) conservano la propria validità quando D è un dominio regolare rispetto all'asse y (o rispetto all'asse x). Senza perdita di generalità consideriamo la (1) riferendoci quindi a un dominio regolare rispetto all'asse y, per cui

$$D = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \Longrightarrow \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy \tag{16}$$

Per quanto appena dimostrato:

$$\iint_{D_k} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \oint_{+\partial D_k} f(x,y)\, dy, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{17}$$

Sommando

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy}_{= \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy} = \sum_{k=1}^{n} \oint_{+\partial D_k} f(x,y)\, dy \tag{18}$$

Nel termine della sommatoria a secondo membro sopravvivono solo gli integrali curvilinei estesi a tratti non rettilinei i.e. appartenenti alla frontiera di D:

$$\oint_{+\partial D_k} f(x,y)\, dy = \sum_{h_k} \int_{\gamma_{h_k}} f(x,y)\, dy, \quad \gamma_k \subset \partial D, \tag{19}$$

per cui

$$\sum_{k=1}^{n} \oint_{+\partial D_k} f(x,y)\, dy = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h_k} \int_{\gamma_{h_k}} f(x,y)\, dy = \oint_{+\partial D} f(x,y)\, dy \tag{20}$$

■