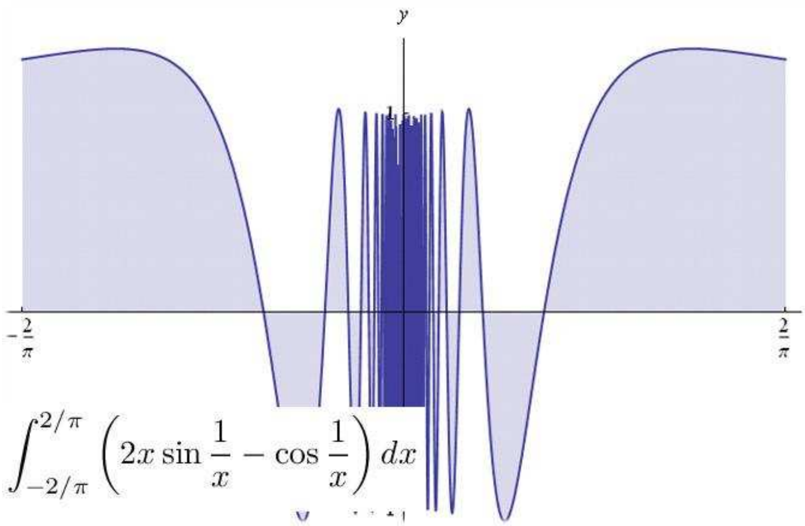
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

L'integrale di Mengoli – Cauchy e il teorema fondamentale del calcolo integrale

Marcello Colozzo



La nozione di integrale definito sviluppata in questa dispensa, permette di risolvere il problema della ricerca della primitiva di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato. Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 1 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a,b] \subset \mathbb{R}$, l'integrale definito di f esteso all'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ si dice **integrale di Mengoli-Cauchy** della funzione f:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta \to 0} \sigma_{\mathcal{D}}, \tag{1}$$

dove $\sigma_{\mathcal{D}} = \Sigma_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$ è una somma integrale relativa a f.

Ci si può chiedere se sia possibile estendere la definizione (1) a funzioni dotate di punti di discontinuità nell'intervallo di integrazione. Ad esempio, assegnata la funzione:

$$f(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}, \tag{2}$$

chiediamoci

$$\textbf{Ha senso l'integrale} \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx\,\textbf{?} \tag{3}$$

La domanda (3) è ben posta, giacchè la funzione integranda non è definita in $x = 0$. Tuttavia:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{t=\frac{1}{x}}{\to} \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^+,$$

onde $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Infatti, prolungando f per continuità:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

assumiamo

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx \tag{5}$$

Il secondo membro della (5) ha senso in virtù della continuità della funzione (2). Ne consegue che l'estensione della definizione (1) a funzioni dotate di punti di discontinuità eliminabili, non presenta alcun problema. Viceversa, i casi più critici sono quelli in cui la funzione integranda presenta uno o più punti di discontinuità di seconda specie nell'intervallo di integrazione. Ad esempio:

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x} \tag{6}$$

Poniamoci la questione:

$$\textbf{Ha senso l'integrale} \int_0^1 \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx\,\textbf{?} \tag{7}$$

f è definita in $X = (0, +\infty)$, risultando non negativa in $(0,1]$. Studiamo il suo comportamento in un intorno destro di $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\frac{\ln 0^+}{0^+} = -\frac{(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty,$$

onde $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie per f. In fig. 1 riportiamo il grafico della funzione in $[0,1]$.

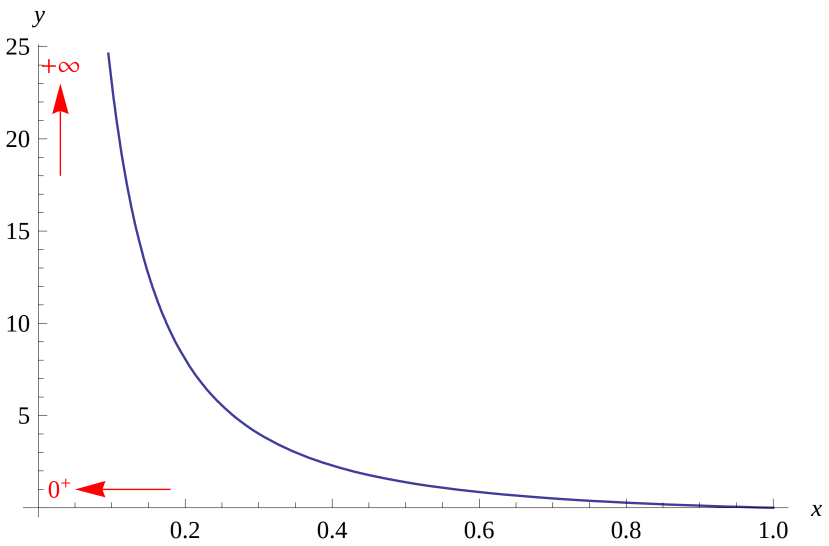


Figura 1: La funzione $f(x) = -\frac{\ln x}{x}$ diverge positivamente per $x \to 0^+$.

A questo punto, proviamo a calcolare le somme integrali dopo aver "equipartizionato" (cfr. § **??**) l'intervallo $[0,1]$:

$$x_k = \frac{k}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

Abbiamo:

$$\sigma_{\mathcal{D}}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right), \tag{8}$$

dove - per migliorare la visualizzazione grafica dell'andamento del termine *n-esimo* della successione $\{\sigma_{\mathcal{D}}\}_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ - abbiamo preso ξ_k pari alla media aritmetica degli estremi del *k-esimo* intervallo $[x_k, x_{k+1}]$. Ad esempio, per $n = 15$ otteniamo l'andamento riportato in fig. 2.

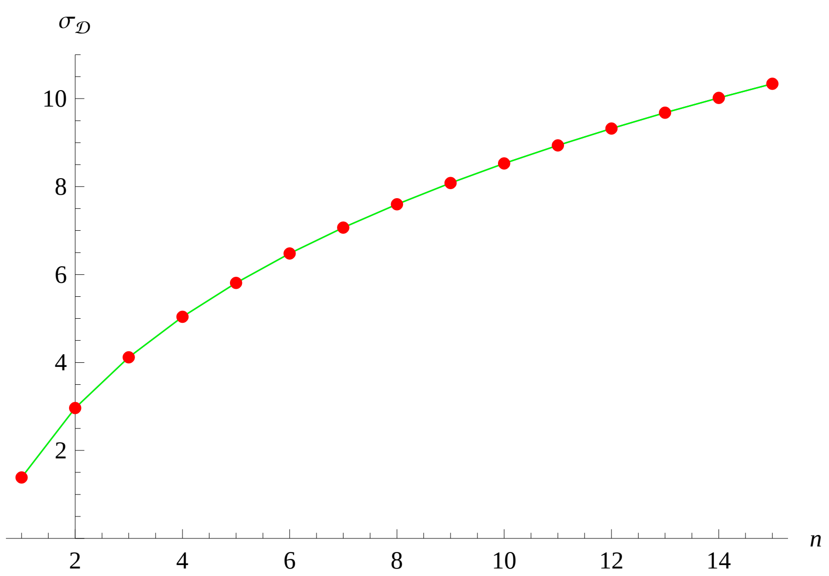


Figura 2: Andamento della somma integrale $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa alla funzione $f(x) = -\frac{\ln x}{x}$ e all'intervallo $[0,1]$. Il numero di punti della decomposizione è $n = 15$.

Per $n = 250$ otteniamo il grafico di fig. 3.

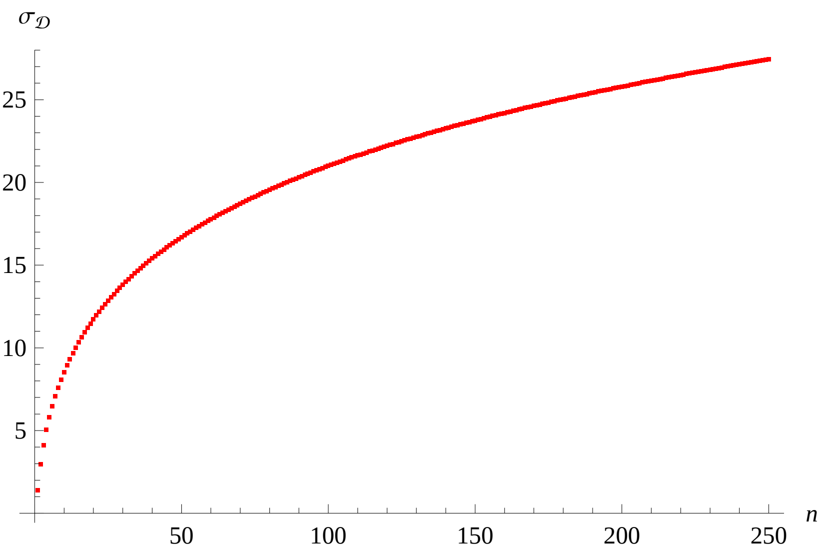


Figura 3: Andamento della somma integrale $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa alla funzione $f(x) = -\frac{\ln x}{x}$ e all'intervallo $[0,1]$. Il numero di punti della decomposizione è $n = 250$.

Questi risultati suggeriscono la seguente risposta alla domanda (7):

$$\int_0^1 \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx = +\infty, \tag{9}$$

che è un risultato ragionevole, giacchè il rettangoloide

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq -\frac{\ln x}{x}\right\},$$

è un insieme illimitato. Tuttavia, osserviamo che tale circostanza non è una condizione sufficiente per la divergenza dell'integrale. Consideriamo, ad esempio, la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{10}$$

e riformuliamo la domanda:

$$\textbf{Ha senso l'integrale} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \textbf{ ?} \tag{11}$$

Anche in questo caso la funzione integranda diverge positivamente per $x \to 0^+$, come illustrato nel grafico di fig. 4.

Utilizzando la (8) otteniamo per $n = 15$ il grafico di fig. 5.

Per $n = 250$ otteniamo il grafico di fig. 6.

Questi risultati suggeriscono la seguente risposta alla domanda (7):

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2, \tag{12}$$

pur essendo il rettangoloide

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\right\},$$

un insieme illimitato. In ultimo, notiamo che non sempre è possibile rappresentare graficamente un rettangoloide. Ad esempio, consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \tag{13}$$

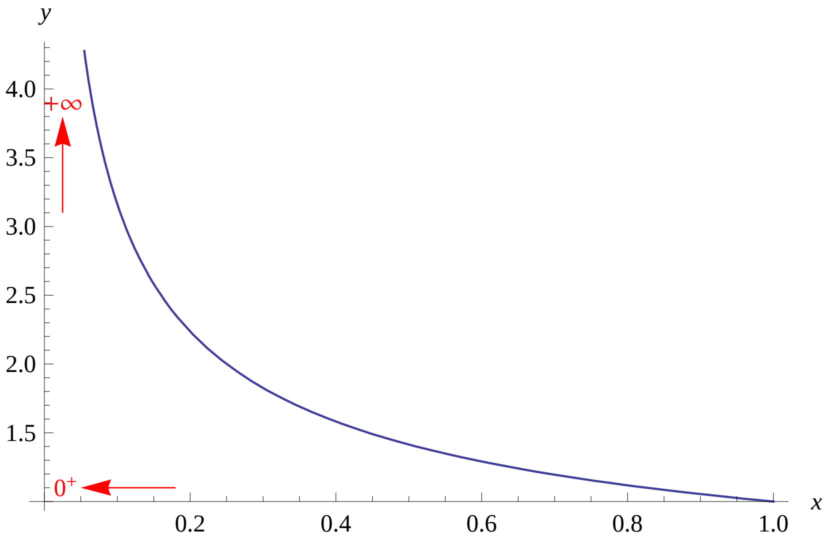


Figura 4: La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ diverge positivamente per $x \to 0^+$.

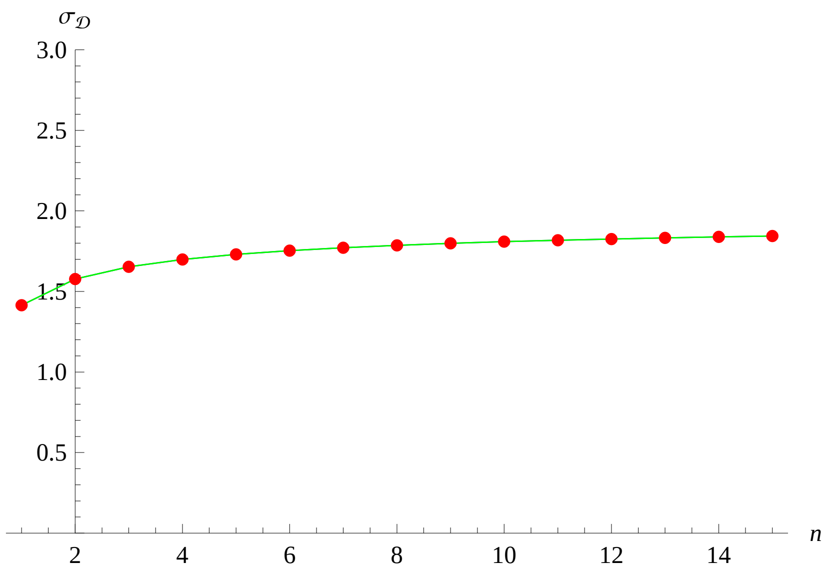


Figura 5: Andamento della somma integrale $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa alla funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e all'intervallo $[0, 1]$. Il numero di punti della decomposizione è $n = 15$.

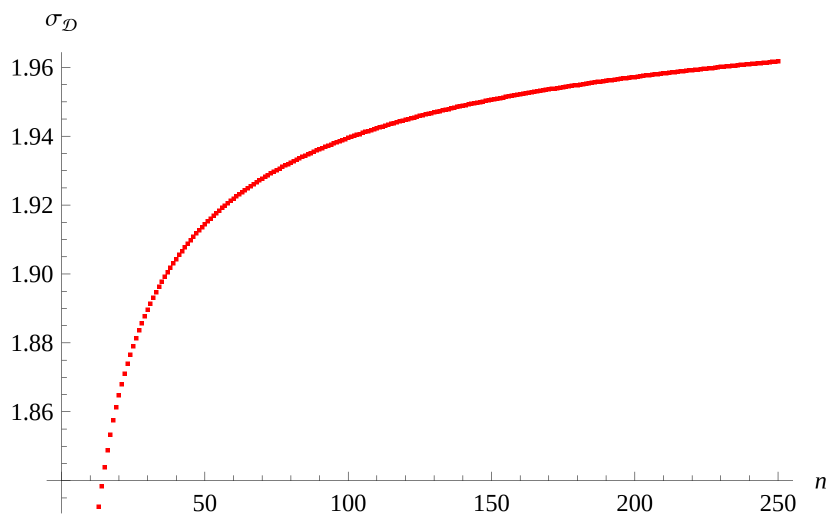


Figura 6: Andamento della somma integrale $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa alla funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e all'intervallo $[0, 1]$. Il numero di punti della decomposizione è $n = 250$.

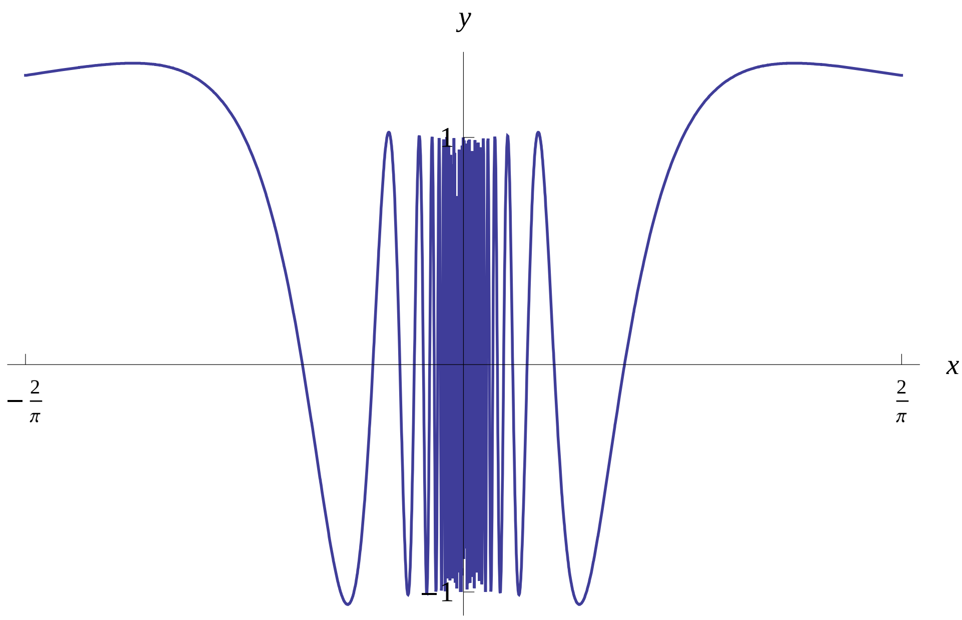


Figura 7: Andamento del grafico della funzione $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ nell'intervallo $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

che è non regolare in $x=0$, giacchè $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$. Il grafico di f compie infinite oscillazioni che non si smorzano in ogni intorno di $x=0$, come possiamo vedere dalla fig. 7.

L'impossibilità di tracciare il grafico in un intorno di $x=0$, rende altrettanto impossibile visualizzare il rettangoloide relativo a f, la cui base contiene il punto di discontinuità $x=0$, come mostrato in fig. 8.

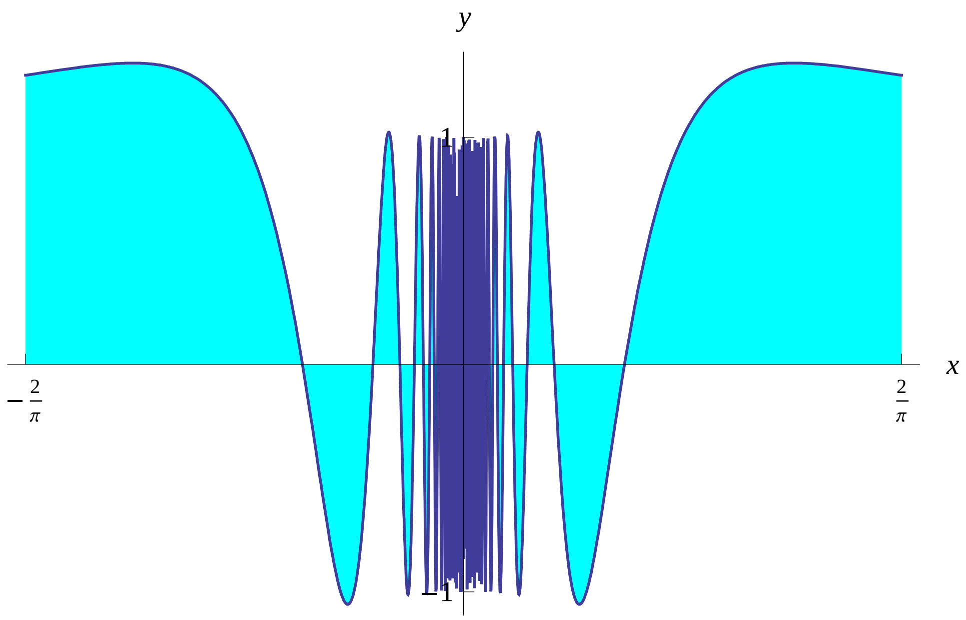


Figura 8: Tentativo di visualizzazione del rettangoloide di base $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ relativo alla funzione $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Possiamo tuttavia tentare il calcolo delle somme integrali, eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $\delta \to 0$. Procedendo al solito modo otteniamo l'andamento riportato in fig. 9 che mostra la convergenza verso il valore $8/\pi^2$, per cui:

$$\int_{-2/\pi}^{2/\pi} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) dx = \frac{8}{\pi^2}$$

Dagli esempi visti vediamo che nel caso di funzioni con punti di discontinuità di seconda specie nell'intervallo di integrazione $[a,b]$, non sempre le somme integrali risultano convergenti per $\delta \to 0$, essendo δ la norma di una arbitraria decomposizione di $[a,b]$. Tale problema fu affrontato e risolto da Riemann per una particolare classe di funzioni, i.e. le *funzioni integrabili secondo Riemann*. L'integrale di tali particolari funzioni si chiama *integrale di Riemann*. Successivamente Lebesgue generalizzò ulteriormente l'estensione della nozione di integrale. Ci occuperemo di ciò in un capitolo successivo.

Dopo questa lunga premessa, dimostriamo il teorema:

Teorema 2 ***(Teorema di Torricelli-Barrow)***

Hp. *$f : X \to \mathbb{R}$ è continua nell'intervallo $X \subseteq \mathbb{R}$.*

Th. *f è dotata di funzioni primitive. Preso ad arbitrio il punto $x_0 \in X$, le primitive di f sono tutte e sole le funzioni:*

$$F(x) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \tag{14}$$

al variare della costante c in $\mathbb{R}$.

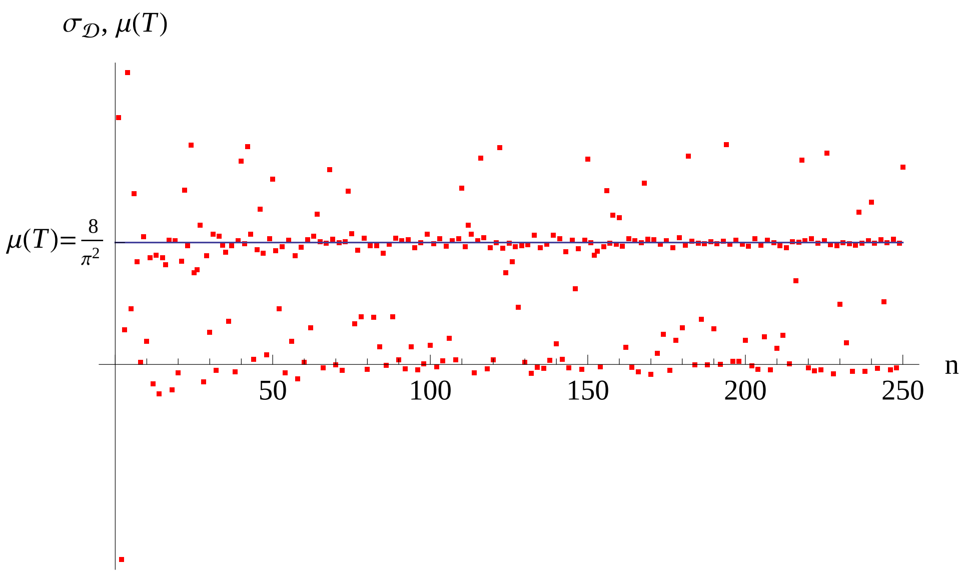


Figura 9: Andamento della somma integrale $\sigma_{\mathcal{D}}$ relativa alla funzione $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ e all'intervallo $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$. Il limite della somma integrale è $\frac{8}{\pi^2}$.

Dimostrazione. Il teorema è dimostrato se riusciamo a provare che $F'(x) = f(x)$. A tale scopo determiniamo l'incremento della funzione F in corrispondenza dell'incremento Δx della variabile indipendente con Δx tale che $(x + \Delta x) \in X$.

$$\begin{aligned}
\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) &= c + \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - c - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt \\
&= \int_{x}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt \\
&= \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo applicato la proprietà additiva dell'integrale definito. Per il teorema della media:

$$\exists \xi \in [x, x + \Delta x] \mid \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)$$

Cioè:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(x + \theta \Delta x), \qquad (0 \leq \theta \leq 1)$$

Quindi:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x + \theta \Delta x)$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta \Delta x) \underset{f \text{ è continua}}{=} f(x),$$

onde l'asserto. ■

Osservazione 3 *La ([14](#)) è indipendente dalla scelta del punto $x_0 \in X$. Infatti per ogni $x_0' \in X - \{x_0\}$:*

$$c + \int_{x_0'}^{x} f(t)\,dt = c + \int_{x_0'}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = c' + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

avendo incorporato in c' l'integrale $\int_{x_0'}^{x_0} f(t)\,dt$ che è una costante.

$$c' \stackrel{def}{=} c + \int_{x_0'}^{x_0} f(t)\,dt$$

Per quanto precede, le primitive di f sono determinate a meno di una costante additiva. Sussiste la seguente definizione:

Definizione 4 *La funzione*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \tag{15}$$

*ottenuta dalla (14) per $c = 0$, si chiama **funzione integrale** della funzione f, di **punto iniziale** x_0.*

Dal teorema di Torricelli-Barrow segue il corollario:

Corollario 5 *Una primitiva di una funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ è univocamente determinata dal suo valore assunto in un punto $x_0 \in X$.*

$$G(x) = G(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{16}$$

Dimostrazione. Se $G(x)$ è una primitiva di f, essa è un elemento della famiglia (14), onde

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \mid G(x) = \gamma + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Riesce:

$$G(x_0) = \gamma + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt}_{=0} = \gamma,$$

da cui la (16). ■

La formula (16) è estremamente efficace, giacchè permette di determinare l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ *senza ricorrere al limite delle somme integrali*. Infatti l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si ottiene dalla (16) ponendo $x_0 = a,\ x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a), \tag{17}$$

da cui vediamo che è possibile determinare l'integrale conoscendo una qualunque primitiva di f. A questo punto osserviamo che mentre il teorema di Torricelli-Barrow fornisce una soluzione al problema dell'esistenza della primitiva di una funzione continua, la formula risolutiva (17) permette di calcolare l'integrale definito della suddetta funzione f attraverso una qualunque primitiva di f. È per questo che il teorema di Torricelli-Barrow è noto anche come **teorema fondamentale del calcolo integrale** e la (17) come **formula fondamentale del calcolo integrale**. Denotando con F una qualunque primitiva di f, sussistono le seguenti notazioni equivalenti:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b$$