

# Differenziabilità secondo Stolz. Parte seconda: piano tangente a una superficie

[Marcello Colozzo <http://www.extrabyte.info>]

## 1 Introduzione

Negli appunti precedenti (inserire link) abbiamo enunciato la definizione di differenziabilità secondo Stolz di una funzione reale  $f$  di  $n \geq 1$  variabili reali. Abbiamo poi visto che nel caso  $n = 1$  la differenziabilità di  $f$  equivale all'esistenza della retta tangente al diagramma cartesiano della funzione medesima. In questi appunti dimostreremo che l'interpretazione geometrica della differenziabilità secondo Stolz si estende in maniera fisiologica al caso  $n > 1$ . Per essere più specifici, mostreremo che nel caso di una funzione  $f$  delle variabili reali  $x, y$ , la differenziabilità di  $f$  in un punto  $P$  equivale all'esistenza del piano tangente alla superficie  $S : z = f(x, y)$  nel punto medesimo. A tale scopo, premettiamo alcune nozioni di geometria differenziale<sup>1</sup>.

## 2 Superfici regolari

### 2.1 Rappresentazione parametrica regolare

**Definizione 1** Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio internamente connesso. Siano assegnate le funzioni reali:

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \quad (1)$$

Le (1) descrivono in  $\mathbb{R}^3$  un luogo geometrico  $S$  denominato superficie (fig 1). Le equazioni (1) costituiscono la **rappresentazione parametrica** di  $S$  e il dominio  $D$  si dice **dominio base**.

**Definizione 2** La rappresentazione parametrica (1) è **regolare** se:

1.  $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$
2.  $\text{rank}(J) = 2$ , dove  $\text{rank}(J)$  è il rango della **matrice jacobiana** delle funzioni  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ :

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

essendo  $x_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} x(u, v)$ , etc.

3.  $\forall (u, v), (u', v') \in D$ , con  $(u, v) \neq (u', v')$ , si ha:

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \neq (x(u', v'), y(u', v'), z(u', v'))$$

Osserviamo che (senza entrare in dettagli) che per una assegnata superficie  $S$ , esistono infinite rappresentazioni parametriche ciascuna delle quali ottenuta attraverso un opportuno cambiamento dei parametri  $(u, v)$ . Le rappresentazioni regolari compongono un particolare sottoinsieme della famiglia di rappresentazioni parametriche di  $S$ . In tale sottoinsieme è possibile stabilire una relazione d'ordine che permette di definire una superficie regolare attraverso una classe di equivalenza. Utilizzando un linguaggio impreciso ma efficace, possiamo asserire che una superficie regolare è l'elemento che accomuna un insieme di rappresentazioni parametriche regolari. Per inciso, una superficie regolare può avere una rappresentazione non regolare. Come vedremo più avanti, ciò è il caso di una sfera di centro e raggio assegnati.

---

<sup>1</sup>In questo lavoro diamo per scontata la nozione di curva regolare.

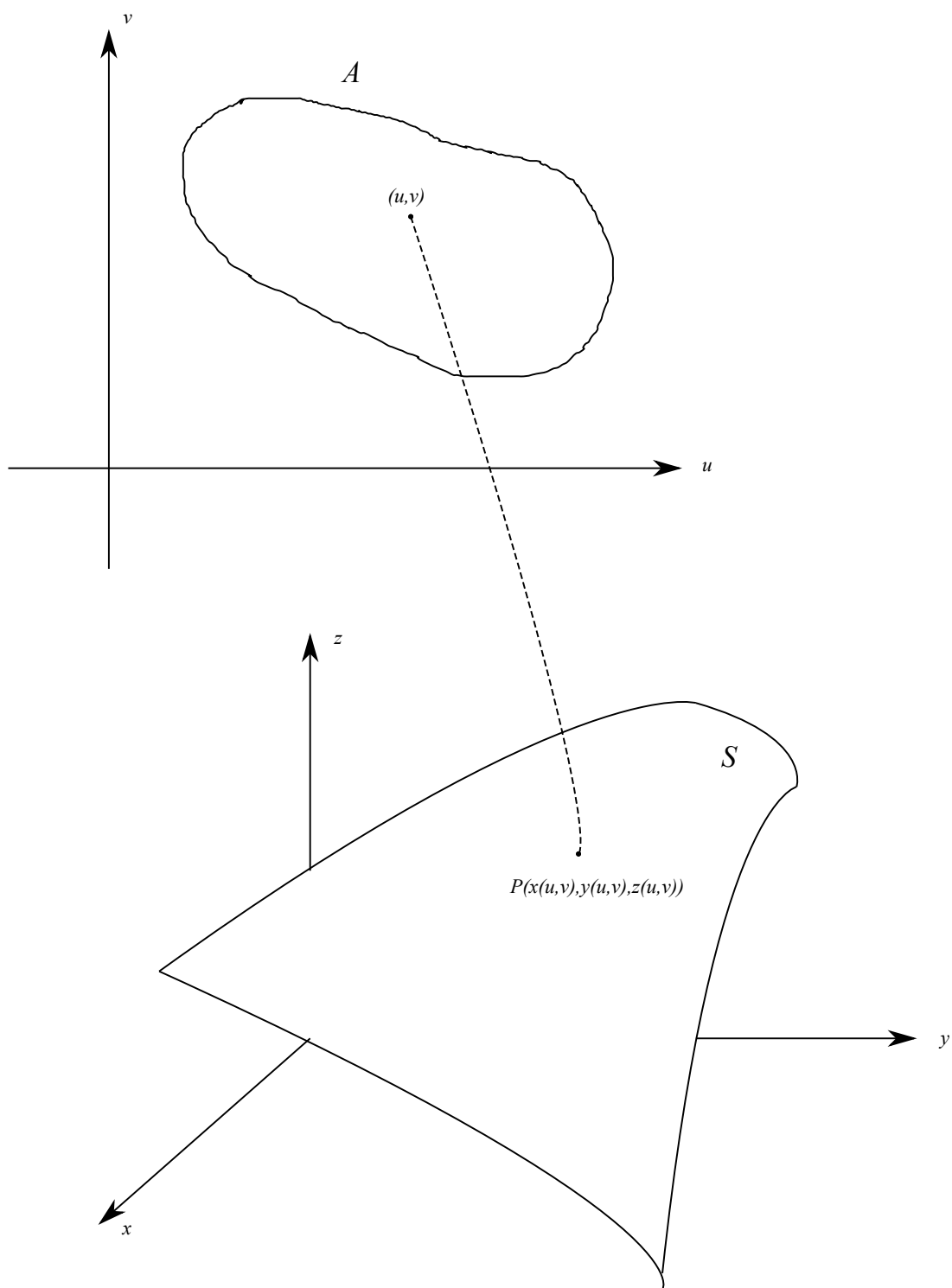


Figura 1: Al punto  $(u, v) \in A$  corrisponde univocamente il punto  $P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$ .

Indichiamo con  $L(u, v)$ ,  $M(u, v)$ ,  $N(u, v)$  i minori del second'ordine estratti dalla matrice jacobiana, cancellando la prima, la seconda e la terza colonna, e presi con segni alterni:

$$L(u, v) = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad M(u, v) = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad N(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \quad (3)$$

Evidentemente:

$$\text{rank}(J) = 2 \iff [L(u, v)]^2 + [M(u, v)]^2 + [N(u, v)]^2 > 0, \quad \forall (u, v) \in D$$

**Definizione 3** *L'interno* di  $S$  è il sottoinsieme  $\mathring{S} \subset S$ :

$$\mathring{S} = \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \mid (u, v) \in \mathring{D} \right\}$$

Un punto  $P$  si dice **interno** a  $S$  se  $P \in \mathring{S}$ . Il **bordo** di  $S$  è il sottoinsieme  $B(S) \subset S$ :

$$B(S) = \left\{ (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S \mid (u, v) \in \partial D \right\}$$

Dall'annullarsi dei determinanti:

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_v & y_v & z_v \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

ricaviamo (tenendo conto delle (3)):

$$\begin{cases} x_u(u, v) L(u, v) + y_u(u, v) M(u, v) + z_u(u, v) N(u, v) = 0 \\ x_v(u, v) L(u, v) + y_v(u, v) M(u, v) + z_v(u, v) N(u, v) = 0 \end{cases}, \quad \forall (u, v) \in D \quad (4)$$

Le funzioni reali delle variabili reali  $u, v$  date dalle (1) sono le componenti della seguente funzione vettoriale delle variabili reali  $u, v$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &: (u, v) \rightarrow \mathbf{x}(u, v), \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k},$$

essendo  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  i versori degli assi coordinati. Riesce:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{x}(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)) \quad (5)$$

Denotando con  $|\cdot|$  il modulo di un vettore in  $\mathbb{R}^3$ , definiamo la seguente funzione reale delle variabili reali  $u, v$ :

$$E(u, v) = |\mathbf{x}_u(u, v)|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad (6)$$

Denotando con  $\cdot$  il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ , definiamo:

$$F(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad (7)$$

Infine:

$$G(u, v) = |\mathbf{x}_v(u, v)|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \quad (8)$$

Dalle formule trovate si ricava facilmente la seguente relazione:

$$E(u, v) G(u, v) - [F(u, v)]^2 = [L(u, v)]^2 + [M(u, v)]^2 + [N(u, v)]^2, \quad \forall (u, v) \in D,$$

cosicchè:

$$E(u, v) G(u, v) - F(u, v)^2 > 0, \quad \forall (u, v) \in D$$

## 2.2 Piano tangente a una superficie regolare in un suo punto interno

Denotiamo con  $C$  una curva regolare del piano cartesiano  $(u, v)$  contenuta in  $D$ . Più precisamente,  $C$  è “interna” a  $D$ , nel senso che  $P \in \overset{\circ}{D}$ ,  $\forall P \in C$ . Assegnata la seguente rappresentazione parametrica regolare:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [a, b] \quad (9)$$

Al variare di  $t$  in  $[a, b]$ , il punto  $(u(t), v(t))$  dell'interno di  $D$  descrive la curva  $C$ ; corrispondentemente, il punto  $P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$  interno alla superficie  $S$ , descrive il luogo  $\Gamma$  di rappresentazione parametrica:

$$x = x[u(t), v(t)], \quad y = y[u(t), v(t)], \quad z = z[u(t), v(t)], \quad t \in [a, b] \quad (10)$$

Dimostriamo la seguente proposizione:

### Proposizione 4

$$C \text{ è regolare} \iff \Gamma \text{ è regolare}$$

**Dimostrazione.** Definiamo:

$$\alpha(t) = x[u(t), v(t)], \quad \beta(t) = y[u(t), v(t)], \quad \gamma(t) = z[u(t), v(t)], \quad (11)$$

per cui la rappresentazione parametrica (10) si scrive:

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t), \quad z = \gamma(t), \quad t \in [a, b] \quad (12)$$

La proposizione è dimostrata se riusciamo a provare che la (12) è regolare, cioè:

$$\begin{cases} \alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1([a, b]), \\ [\alpha'(t)]^2 + [\beta'(t)]^2 + [\gamma'(t)]^2 > 0, \quad \forall t \in [a, b] \\ [\alpha(t'), \beta(t'), \gamma(t')] \neq [\alpha(t''), \beta(t''), \gamma(t'')] \end{cases} \quad (13)$$

La terza è immediata, per cui dobbiamo dimostrare solo le prime due. Osserviamo innanzitutto che dalla regolarità delle rappresentazioni parametriche (1)-(9) segue che le funzioni

$$x[u(t), v(t)], \quad y[u(t), v(t)], \quad z[u(t), v(t)]$$

sono funzioni composte le cui componenti sono di classe  $C^1$  sui rispettivi insiemi di definizione. A sua volta ciò implica  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1([a, b])$ , cioè la prima delle (13). Dimostriamo la seconda. Per il teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = x_u[u(t), v(t)]u'(t) + x_v[u(t), v(t)]v'(t) \\ \beta'(t) = y_u[u(t), v(t)]u'(t) + y_v[u(t), v(t)]v'(t) \\ \gamma'(t) = z_u[u(t), v(t)]u'(t) + z_v[u(t), v(t)]v'(t) \end{cases} \quad (14)$$

Per assurdo:

$$\exists t_0 \in [a, b] \mid \alpha'(t_0) = \beta'(t_0) = \gamma'(t_0) = 0,$$

per cui dalle (14) si ottiene il sistema omogeneo nelle incognite  $(u'(t_0), v'(t_0))$ :

$$\begin{cases} x_u[u(t_0), v(t_0)]u'(t_0) + x_v[u(t_0), v(t_0)]v'(t_0) = 0 \\ y_u[u(t_0), v(t_0)]u'(t_0) + y_v[u(t_0), v(t_0)]v'(t_0) = 0 \\ z_u[u(t_0), v(t_0)]u'(t_0) + z_v[u(t_0), v(t_0)]v'(t_0) = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

la cui matrice dei coefficienti è la trasposta di  $J(u(t_0), v(t_0))$ . Dall'ipotesi di regolarità della rappresentazione parametrica di  $S$  segue che  $\text{rank}(J) = 2 \implies \text{rank}(J^T) = 2$ , per cui il sistema (15)

ammette la sola soluzione banale  $u(t_0) = v(t_0) = 0$  che è contro l'ipotesi di regolarità di  $C$ , onde la seconda delle (13). ■

Ne consegue che a ogni curva regolare  $C$  contenuta in  $\mathring{D}$ , corrisponde una curva  $\Gamma$  contenuta in  $\mathring{S}$ , e viceversa. Chiamiamo  $\Gamma$  *curva tracciata* su  $S$ . Tale nozione ci consente di dare una definizione di *piano tangente a una superficie regolare in un punto interno assegnato*. Più precisamente, assegnato  $P_0 \in \mathring{S}$ , denotiamo con  $\Phi_{P_0}$  la famiglia delle curve regolari tracciate su  $S$  e passanti per  $P_0$ :

$$\Phi_{P_0} = \left\{ \Gamma \subset \mathring{S} \mid P_0 \in \Gamma \right\}$$

a cui corrisponde la famiglia  $\Psi_{P_0}$  delle rette tangenti a  $\Gamma$  in  $P_0$ ,  $\forall \Gamma \in \Phi_{P_0}$ . Dimostriamo la seguente proposizione

**Proposizione 5** *Le rette  $\tau \in \Psi_{P_0}$  sono contenute in un piano  $\pi_0$  passante per  $P_0$ .*

**Dimostrazione.**

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathring{S} \implies \exists (u_0, v_0) \in \mathring{D} \mid x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0)$$

Se  $\Gamma$  è una qualunque curva regolare tracciata su  $S$  e passante per  $P_0$ , per la proposizione 4, esiste una curva regolare  $C$  contenuta in  $D$  di rappresentazione parametrica:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [a, b]$$

tale che la rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  è

$$x = x[u(t), v(t)], \quad y = y[u(t), v(t)], \quad z = z[u(t), v(t)], \quad t \in [a, b]$$

per cui  $\exists t_0 \in [a, b] \mid u_0 = u(t_0), \quad v_0 = v(t_0)$ . Definendo le funzioni (11) segue che l'equazione (nella forma di rapporti uguali) della retta tangente  $\tau$  a  $\Gamma$  in  $P_0$  è:

$$\frac{x - \alpha(t_0)}{\alpha'(t_0)} = \frac{y - \beta(t_0)}{\beta'(t_0)} = \frac{z - \gamma(t_0)}{\gamma'(t_0)} \quad (16)$$

I numeri direttori di  $\tau$  sono  $\alpha'(t_0), \beta'(t_0), \gamma'(t_0)$ . Cioè le (14) calcolate in  $t_0$ :

$$\begin{cases} \alpha'(t_0) = x_u[u(t_0), v(t_0)] u'(t) + x_v[u(t_0), v(t_0)] v'(t) \\ \beta'(t_0) = y_u[u(t_0), v(t_0)] u'(t) + y_v[u(t_0), v(t_0)] v'(t) \\ \gamma'(t_0) = z_u[u(t_0), v(t_0)] u'(t) + z_v[u(t_0), v(t_0)] v'(t) \end{cases} \quad (17)$$

Riprendiamo le funzioni (3) ponendo:

$$L_0 = L(u_0, v_0), \quad M_0 = M(u_0, v_0), \quad N_0 = N(u_0, v_0)$$

Per quanto precede, dall'ipotesi di regolarità di  $S$  segue  $(L_0, M_0, N_0) \neq (0, 0, 0)$  per cui esiste una retta  $n_0$  per  $P_0$  e di numeri direttori  $L_0, M_0, N_0$  e quindi di equazione:

$$\frac{x - \alpha(t_0)}{L_0} = \frac{y - \beta(t_0)}{M_0} = \frac{z - \gamma(t_0)}{N_0} \quad (18)$$

Notiamo che  $n_0$  non dipende da  $\Gamma$ , ma solo da  $S$  e da  $P_0$ . Dalla Geometria analitica sappiamo che i numeri direttori di una retta sono le componenti cartesiane di un qualunque vettore parallelo alla retta. Quindi poniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_\tau &= \alpha'(t_0) \mathbf{i} + \beta'(t_0) \mathbf{j} + \gamma'(t_0) \mathbf{k} \\ \mathbf{w}_{n_0} &= L_0 \mathbf{i} + M_0 \mathbf{j} + N_0 \mathbf{k} \end{aligned}$$

Mostriamo che  $\tau$  e  $n_0$  sono ortogonali, cioè

$$\mathbf{w}_\tau \cdot \mathbf{w}_{n_0} = 0 \iff \alpha'(t_0) L_0 + \beta'(t_0) M_0 + \gamma'(t_0) N_0 = 0$$

Tenendo conto delle (17):

$$\begin{aligned} & [x_u(u_0, v_0) u'(t_0) + x_v(u_0, v_0) v'(t_0)] L_0 \\ & + [y_u(u_0, v_0) u'(t_0) + y_v(u_0, v_0) v'(t_0)] M_0 \\ & + [z_u(u_0, v_0) u'(t_0) + z_v(u_0, v_0) v'(t_0)] N_0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Cioè

$$\begin{aligned} & [x_u(u_0, v_0) L_0 + y_u(u_0, v_0) M_0 + z_u(u_0, v_0) N_0] u'(t_0) \\ & + [x_v(u_0, v_0) L_0 + y_v(u_0, v_0) M_0 + z_v(u_0, v_0) N_0] v'(t_0) \\ & = 0, \end{aligned}$$

che è verificata in virtù delle (4). Ne consegue  $\tau \perp n_0$ ,  $\forall \tau \in \Psi_{P_0}$ . A sua volta tale circostanza implica che tutte le rette tangenti a  $\Gamma$  in  $P_0$  giacciono in un piano  $\pi_0$  perpendicolare a  $n_0$ . ■

Si noti che abbiamo dimostrato oltre all'esistenza, anche la perpendicolarità di  $\pi_0$  a una particolare retta  $n_0$  univocamente determinata da  $S$  e da  $P_0$ . Inoltre, la predetta dimostrazione ci consente di scrivere l'equazione di tale piano imponendo la condizione di perpendicolarità nota dalla Geometria analitica:

$$(x - x_0) L_0 + (y - y_0) M_0 + (z - z_0) N_0 = 0 \quad (19)$$

**Definizione 6** Il piano  $\pi_0$  si dice **piano tangente** alla superficie regolare  $S$  nel punto interno  $P_0$ . Conseguentemente,  $n_0$  è la **retta normale** a  $S$  in  $P_0$ . La sua equazione è

$$\frac{x - x_0}{L_0} = \frac{y - y_0}{M_0} = \frac{z - z_0}{N_0} \quad (20)$$

### 2.3 Linee coordinate su una superficie regolare

Assegnata la superficie regolare  $S$  di rappresentazione parametrica (1), consideriamo nel piano cartesiano  $(u, v)$  le rette per  $(u_0, v_0) \in \mathring{D}$  e parallele agli assi coordinati. Cioè, rette le cui equazioni sono rispettivamente  $u = u_0$  e  $v = v_0$ . Siano  $C_{u_0}$  e  $C_{v_0}$  i segmenti di tali rette contenuti in  $\mathring{D}$ . Si tratta di curve regolari di rappresentazione parametrica rispettivamente:

$$\begin{aligned} C_{u_0} : u &= u_0, \quad v = t, \quad t \in [t_1, t_2] \\ C_{v_0} : u &= t, \quad v = v_0, \quad t \in [t'_1, t'_2] \end{aligned}$$

Alla coppia ordinata di curve regolari  $(C_{u_0}, C_{v_0})$  corrisponde la coppia ordinata  $(\Gamma_{u_0}, \Gamma_{v_0})$  di curve regolari tracciate su  $S$ .

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_0} : x &= x(u_0, t), \quad y = y(u_0, t), \quad z = z(u_0, t), \quad t \in [t_1, t_2] \\ \Gamma_{v_0} : x &= x(t, v_0), \quad y = y(t, v_0), \quad z = z(t, v_0), \quad t \in [t'_1, t'_2] \end{aligned}$$

Risulta  $P_0 = \Gamma_{u_0} \cap \Gamma_{v_0}$ , dove  $P_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)) \in \mathring{S}$ .

**Definizione 7** La coppia ordinata  $(u_0, v_0)$  definisce le **coordinate curvilinee** di  $P_0 \in \mathring{S}$ , mentre le curve regolari  $\Gamma_{u_0}$  e  $\Gamma_{v_0}$  si dicono **linee coordinate** passanti per  $P_0$ .

Da tale definizione segue che la posizione di un qualunque punto interno di  $S$  può essere definita o da un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(x, y, z)$  o attraverso il sistema di coordinate curvilinee  $(u, v)$  determinato dalla rappresentazione parametrica di  $S$ . Dalle (5) segue immediatamente che le derivate parziali  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  e  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  sono vettori tangenti alle linee coordinate  $\Gamma_{v_0}$  e  $\Gamma_{u_0}$ , mentre  $\sqrt{E(u_0, v_0)}$ ,  $\sqrt{G(u_0, v_0)}$  sono le lunghezze di tali vettori.

**Definizione 8** Il sistema di coordinate curvilinee  $(u, v)$  si dice ortogonale se  $\Gamma_{u_0}$  è ortogonale a  $\Gamma_{v_0}$  in  $P_0$ ,  $\forall P_0 \in \overset{\circ}{S}$ .

È chiaro che  $\Gamma_{u_0}$  e  $\Gamma_{v_0}$  sono ortogonali in  $P_0$  se e solo se i vettori  $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$  e  $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$  sono ivi ortogonali, cioè:

$$\mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v) = 0 \iff F(u, v) = 0, \quad \forall (u, v) \in \overset{\circ}{D}$$

Se il sistema di coordinate non è ortogonale, l'angolo  $\omega$  tra le linee coordinate è tale che:

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \cdot \mathbf{x}_v(u, v)}{\pm |\mathbf{x}_u(u, v)| |\mathbf{x}_v(u, v)|} \\ &= \frac{F(u, v)}{\pm \sqrt{E(u, v) G(u, v)}} \end{aligned}$$

Consideriamo un esempio tratto da [2]. Sia data la superficie  $S$  di rappresentazione parametrica:

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u, \quad (u, v) \in D = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$$

la cui matrice jacobiana è:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$L(u, v) = \sin^2 u \cos v, \quad M(u, v) = \sin^2 u \sin v, \quad N(u, v) = \sin u \cos u$$

Quadrando e sommando:

$$L(u, v)^2 + M(u, v)^2 + N(u, v)^2 = \sin^2 u$$

Riesce

$$L(u, v)^2 + M(u, v)^2 + N(u, v)^2 > 0 \iff u \neq k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$F(u, v) = 0,$$

onde il sistema di coordinate curvilinee  $(u, v)$  è ortogonale. Riconosciamo in  $u$  e  $v$  le coordinate angolari  $\theta$  e  $\varphi$  del sistema di coordinate polari nello spazio ordinario. Quindi la coordinata  $u$  è la colatitudine di  $P \in \overset{\circ}{S}$ , mentre  $v$  è la longitudine del medesimo punto. Più precisamente, la superficie assegnata è una porzione della sfera di centro l'origine e raggio unitario. Ciò si ottiene immediatamente quadrando e sommando le singole funzioni della rappresentazione parametrica, per ottenere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Per quanto precede,  $S$  non è tutta la sfera, giacchè in tal caso il dominio base è  $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Ma, per quanto detto, deve essere  $u \neq k\pi$  affinché la rappresentazione parametrica sia regolare<sup>2</sup>.

Le linee coordinate per  $P_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  sono:

$$\begin{aligned} \Gamma_{u_0} : x &= \sin u_0 \cos v, \quad y = \sin u_0 \sin v, \quad z = \cos u_0, \quad \forall v \in [v_1, v_2] \\ \Gamma_{v_0} : x &= \sin u \cos v_0, \quad y = \sin u \sin v_0, \quad z = \cos u, \quad \forall u \in [u_1, u_2] \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Come avevamo osservato nel primo paragrafo, una superficie regolare può avere rappresentazioni non regolari. Infatti, nel caso in esame la rappresentazione parametrica assegnata con dominio base  $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  è non regolare.

$\Gamma_{u_0}$  è un arco di parallelo per  $P_0$ , mentre  $\Gamma_{v_0}$  è un arco di meridiano per  $P_0$ . Più precisamente, la rappresentazione parametrica:

$$x = \sin u_0 \cos v, \quad y = \sin u_0 \sin v, \quad z = \cos u_0, \quad \forall v \in [0, 2\pi],$$

al variare di  $u_0$  in  $[0, \pi]$ , definisce i *paralleli* della sfera considerata, mentre la rappresentazione parametrica:

$$x = \sin u \cos v_0, \quad y = \sin u \sin v_0, \quad z = \cos u, \quad \forall u \in [0, \pi]$$

al variare di  $v_0$  in  $[0, 2\pi]$ , definisce i *meridiani* della sfera.

### 3 Piano tangente al grafico di una funzione $f(x, y)$

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $D$  è un dominio internamente connesso di  $\mathbb{R}^2$ . Una rappresentazione parametrica del grafico di  $f$ , cioè della superficie  $S : z = f(x, y)$  è:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in D, \quad (21)$$

la cui matrice jacobiana è:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u(u, v) \\ 0 & 1 & f_v(u, v) \end{pmatrix},$$

onde

$$L(u, v) = -f_u(u, v), \quad M(u, v) = -f_v(u, v), \quad N(u, v) = 1, \quad \forall (u, v) \in D$$

Da ciò segue che la rappresentazione parametrica (21) è regolare se e solo se  $f \in C^1(D)$ . Si noti che con tale scelta dei parametri, il sistema di coordinate  $(u, v)$  si identifica con l'usuale sistema di coordinate cartesiane del piano coordinato  $xy$ , onde possiamo riscrivere le funzioni  $L, M, N$  come:

$$L(x, y) = -f_x(x, y), \quad M(x, y) = -f_y(x, y), \quad N(x, y) = 1, \quad \forall (x, y) \in D \quad (22)$$

e quindi l'equazione del piano tangente in  $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  data dall'eq. (19) che diviene:

$$-(x - x_0) f_x(x_0, y_0) - (y - y_0) f_y(x_0, y_0) + z - z_0 = 0$$

Cioè:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (23)$$

che è un'estensione a  $\mathbb{R}^2$  dell'equazione della retta tangente al grafico  $y = f(x)$  di una funzione reale di una variabile reale in  $x_0$ :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Possiamo altresì estendere l'interpretazione geometrica del differenziale da  $\mathbb{R}^1$  a  $\mathbb{R}^2$ . Infatti, nel caso di  $y = f(x)$ , dove  $f$  è differenziabile in  $x_0$ , il differenziale  $df = f'(x_0) \Delta x$  è l'incremento dell'ordinata del punto  $M$  della retta tangente in  $x_0$  quando la sua ascissa subisce un incremento  $\Delta x$ . Quando passiamo a 2 variabili, si ha che  $df = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$  è l'incremento che subisce la quota del punto  $M$  del piano tangente a  $S$  in  $P_0$ , quando la sua proiezione sul piano  $xy$  passa da  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ .

Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x, y) = x^2 + y^2,$$

che è di classe  $C^2$  su tutto  $\mathbb{R}^2$ . Utilizzando la (23) possiamo scrivere l'equazione del piano tangente  $\pi_0$  a  $S : y = f(x, y)$  nel punto  $(0, 3, 9)$ , ottenendo:

$$6y - z - 9 = 0$$

In fig.



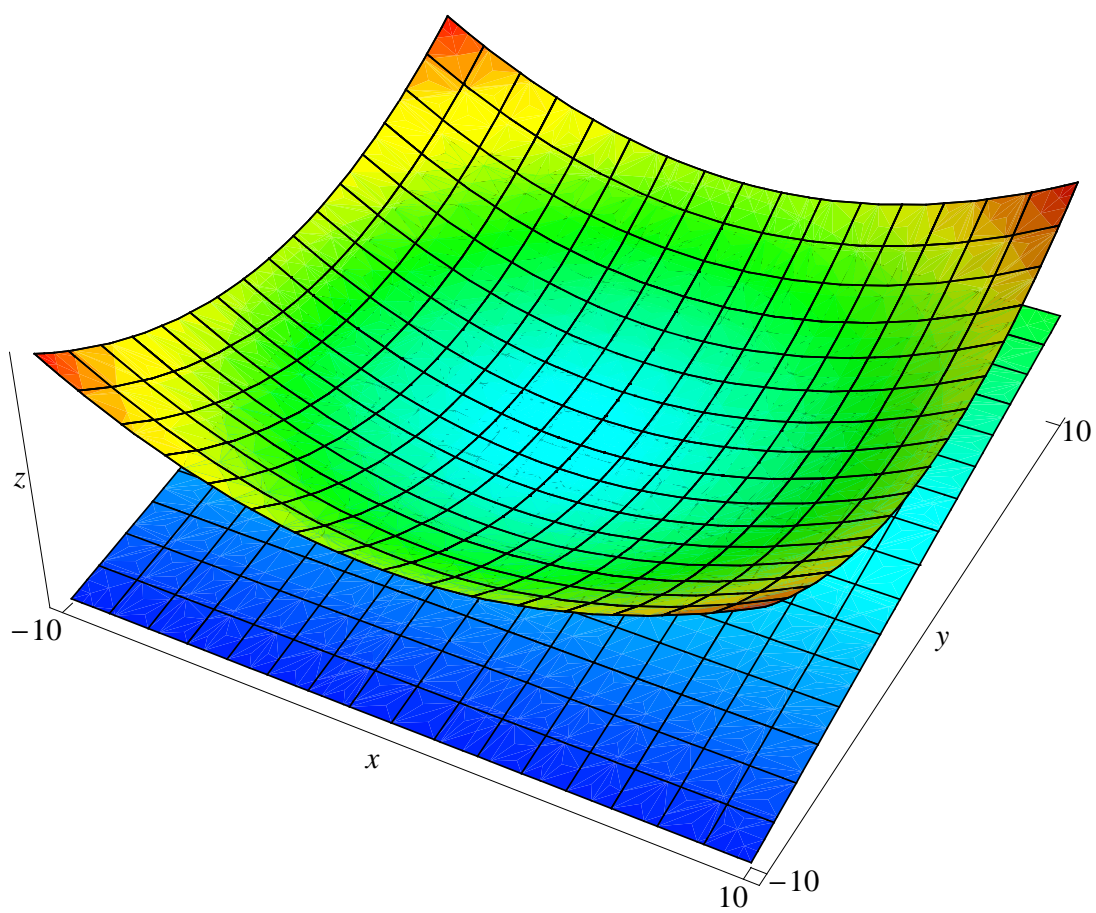


Figura 2: Piano tangente alla superficie regolare di equazione cartesiana  $z = x^2 + y^2$  (*paraboloide di rivoluzione*).

## 4 Piano tangente a una superficie non necessariamente regolare

Nei paragrafi precedenti abbiamo enunciato la nozione di superficie regolare, mostrando come sia possibile definire il piano tangente in un punto assegnato. Abbiamo poi applicato le formule ottenute al caso del grafico di una funzione reale delle variabili reali  $x, y$ , mostrando che tale grafico è una superficie regolare se la funzione  $f$  è di classe  $C^1$  sul proprio dominio di definizione (assunto internamente connesso). In realtà, la condizione  $f \in C^1$  è superflua: basta imporre la condizione di differenziabilità secondo Stolz che, ricordiamo, richiede l'esistenza di entrambe le derivate parziali in un punto assegnato, ma solo la continuità di una delle due (in un intorno del punto medesimo). Sussiste, invero, il teorema:

**Teorema 9** *Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  campo di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f$  è differenziabile secondo Stolz in  $(x_0, y_0) \in A$ , la superficie  $S : z = f(x, y)$  è dotata di piano tangente in  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , dove  $z_0 = f(x_0, y_0)$ .*

**Dimostrazione.** Sia  $C$  una qualunque curva regolare contenuta in  $A$  e passante per  $(x_0, y_0)$  con rappresentazione parametrica:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b] \quad (24)$$

Evidentemente:  $(x_0, y_0) \in C \implies \exists t_0 \in [a, b] \mid x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ . Alla curva  $C$  corrisponde una curva  $\Gamma$  tracciata su  $S$ . Tale curva non è in generale regolare; infatti, non possiamo applicare la proposizione 4 che richiede la regolarità di  $S$ . La rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  "indotta" dalla (24) è:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = f[x(t), y(t)], \quad t \in [a, b] \quad (25)$$

Dimostriamo che  $\Gamma$  pur essendo una curva non necessariamente regolare è dotata di retta tangente in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  in virtù della differenziabilità secondo Stolz di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ . A tale scopo diamo un incremento  $\Delta t$  tale che  $(t_0 + \Delta t) \in [a, b]$ . Detto  $Q$  il punto di  $\Gamma$  corrispondente al valore  $t_0 + \Delta t$  del parametro, scriviamo l'equazione della retta secante  $s$  a  $\Gamma$  passante per  $P_0$  e  $Q$ . Una terna di numeri direttori di  $s$  è  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , dove:

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0), \quad \Delta z = z(t_0 + \Delta t) - z(t_0), \quad (26)$$

cioè i corrispondenti incrementi delle funzioni  $x(t), y(t), z(t) = f[x(t), y(t)]$ . Quindi l'equazione di  $s$  è:

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z} \quad (27)$$

A questo punto dobbiamo stabilire l'esistenza del limite:

$$\lim_{Q \rightarrow P_0} s, \quad (28)$$

che, come è noto, definisce la retta tangente come posizione limite della retta secante  $s$  al tendere di  $Q$  a  $P_0$ . Per determinare tale limite, riscriviamo l'equazione di  $s$  per ogni  $\Delta t \neq 0$ :

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}} \quad (29)$$

Quindi:

$$\lim_{Q \rightarrow P_0} s : \frac{x - x_0}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}} \quad (30)$$

Dall'ipotesi di regolarità di  $C$  segue immediatamente:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = y'(t_0),\end{aligned}\quad (31)$$

per cui ci rimane da calcolare  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$ . A tale scopo esplicitiamo il rapporto incrementale della funzione composta  $z(t) = f[x(t), y(t)]$ :

$$\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = \frac{f[x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)] - f[x(t_0), y(t_0)]}{\Delta t}$$

Ma  $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) \xrightarrow{x(t_0)=x_0} x(t_0 + \Delta t) = x_0 + \Delta x$  e in maniera simile per  $\Delta y$ . Otteniamo:

$$\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Per ipotesi  $f$  è differenziabile secondo Stolz in  $(x_0, y_0)$ , per cui  $\Delta f - [f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y] = o(\rho)$ , avendo utilizzato il simbolo di Landau per denotare un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\rho$ , che può essere scritto come  $\omega(\rho) \rho$ , dove la funzione  $\omega(\rho)$  un qualunque infinitesimo per  $\rho \rightarrow 0$ . Quindi:

$$\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = \frac{f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \omega(\rho) \rho}{\Delta t}$$

Ricordando che  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ , si ha:

$$\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta t} + \omega(\rho) \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \quad (32)$$

Inoltre, sempre per l'ipotesi di regolarità di  $C$ , le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  sono continue, per cui

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho(\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{[x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]^2 + [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]^2} = 0$$

Perciò

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega[\rho(\Delta t)] = \lim_{\rho \rightarrow 0} \omega(\rho) = 0$$

Tenendo conto delle (31):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \omega[\rho(\Delta t)] \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \right\} = 0 \cdot \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} = 0$$

Ne consegue che eseguendo l'operazione di passaggio al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  nella (32)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} = f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0) \quad (33)$$

Sostituendo i limiti calcolati nella (30) otteniamo l'equazione della retta tangente  $\tau_0$  a  $\Gamma$  nel punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0)} \quad (34)$$

Una terna di numeri direttori di  $\tau_0$  è:

$$x'(t_0), \quad y'(t_0), \quad f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0)$$

Alla famiglia di curve regolari  $C$  contenute in  $A$  e passanti per  $(u_0, v_0)$  corrisponde una famiglia di curve  $\Gamma$  tracciate su  $S$ , non necessariamente regolari e passanti per  $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . Per quanto precede, tali curve sono dotate di retta tangente in  $P_0$  e dall'espressione dei numeri direttori segue che esse sono contenute nel piano:

$$z - f(x_0, y_0) = (x - x_0) f_x(x, y) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0),$$

che è il piano tangente a  $S : z = f(x, y)$  in  $P_0$ . ■

Riscriviamo la (33):

$$z'(t_0) = f_x(x_0, y_0) x'(t_0) + f_y(x_0, y_0) y'(t_0)$$

che definisce la derivata della funzione composta  $z(t) = f[x(t), y(t)]$ . Tale equazione è una conseguenza della differenziabilità secondo Stolz della funzione  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Pertanto la dimostrazione della (33) dimostra, a sua volta, il ben noto teorema di derivazione delle funzioni composte:

**Teorema 10 *Ipotesi:***

1.  $x(t), y(t)$  funzioni derivabili in  $[a, b]$ .
2.  $\forall t \in [a, b], P[x(t), y(t)] \in A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid A$  è un campo
3.  $\exists f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f$  è differenziabile secondo Stolz in  $A$

**Tesi:** La funzione composta  $f[x(t), y(t)]$  è derivabile in  $A$  e riesce:

$$\frac{d}{dt} f[x(t), y(t)] = f_x(x, y) x'(t) + f_y(x, y) y'(t)$$

**Osservazione 11** Osserviamo che nei corsi di Analisi 2 per la dimostrazione del teorema precedente, è richiesta la continuità delle derivate parziali prime di  $f$ . Ma, abbiamo appena dimostrato che condizione necessaria è la differenziabilità (secondo Stolz) di  $f$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] Gizzetti A.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Veschi, 1971
- [2] Fichera G., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa*, Veschi, 1987.