Studio di un integrale

Marcello Colozzo

Studiamo la convergenza del seguente integrale

$$I\left(x^{1/k}\right)=\int_{x^{1/k}}^{+\infty}g\left(t\right)dt, \tag{1}$$

essendo

$$g\left(t\right)=\frac{1}{t\left(t^2-1\right)\ln t} \tag{2}$$

Il grafico della funzione integranda ha l'andamento riportato in fig. 1. Per i dettagli sul comportamento agli estremi del campo di esistenza di $g\left(t\right)$ si rimanda alla seguente risorsa.

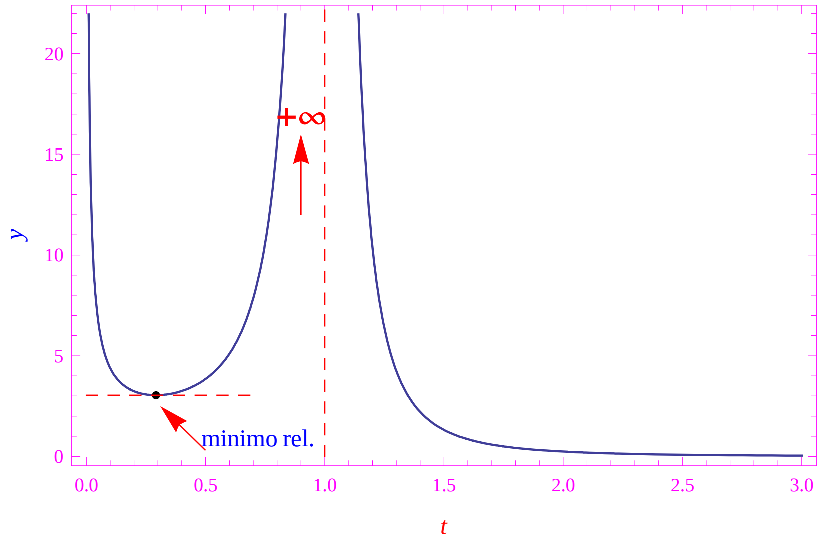

Figura 1: Grafico di $g\left(t\right)=\frac{1}{t(t^2-1)\ln t}$.

Intervallo $(0,1)$

Siccome la funzione integranda per $t\to0^+$ è un infinito di ordine indeterminato, procediamo al calcolo tramite un'operazione di passaggio al limite. Assumiamo

$$0<\varepsilon<\delta\ll1,$$

come in fig. 2. Risulta

$$g\left(t\right)\simeq-\frac{1}{t\ln t},\quad\forall t\in\left(\varepsilon,\delta\right), \tag{3}$$

come confermato dal grafico di fig. 3.

Segue

$$\int_{\varepsilon}^{\delta}g\left(t\right)dt\simeq-\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{dt}{\ln t}=-\left[\ln\left|\ln t\right|\right]_{t=\varepsilon}^{t=\delta}=\ln\left(\frac{\left|\ln\varepsilon\right|}{\left|\ln\delta\right|}\right)$$

Quindi

$$\int_{0}^{\delta}g\left(t\right)dt=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\delta}g\left(t\right)dt=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\left(\frac{\left|\ln\varepsilon\right|}{\left|\ln\delta\right|}\right)=+\infty$$

Ne concludiamo

$$\int_{0}^{a}g\left(t\right)dt=+\infty,\quad\forall a\in\left(0,1\right) \tag{4}$$

Intervallo $(1-\delta,1+\delta)$

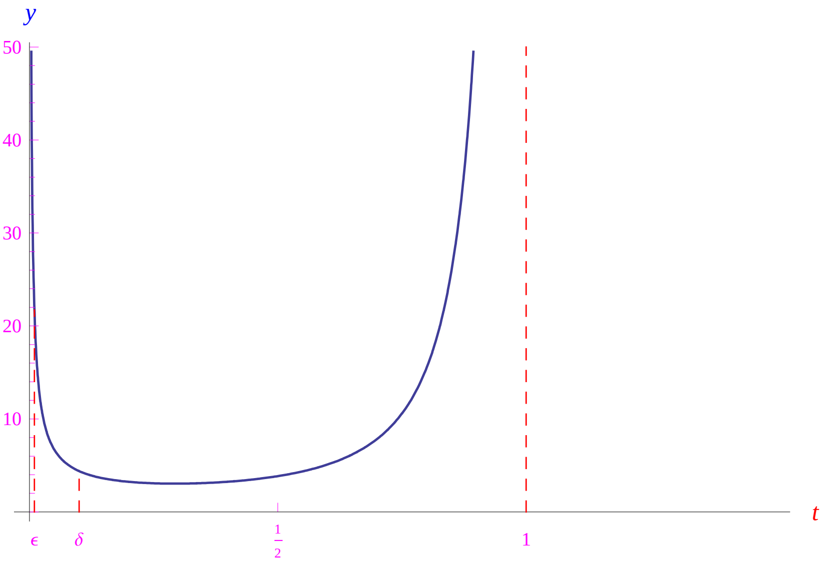

Figura 2: Studio dell'integrale in $(0, 1)$.

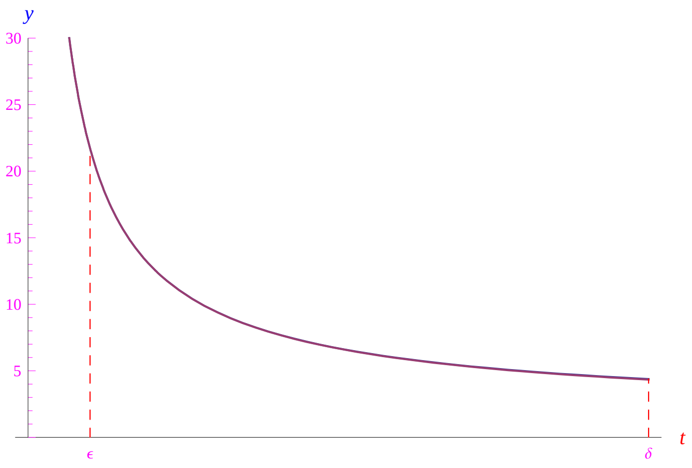

Figura 3: I grafici delle restrizioni delle funzioni $g(t)$ e $-\frac{1}{t \ln t}$ all'intervallo (ε, δ) con $0 < \varepsilon < \delta \ll 1$, sono praticamente sovrapposti. Ciò implica che in detto intervallo la funzione $g(t)$ si comporta come $-\frac{1}{t \ln t}$.

Dal momento che per $t \to 1$ la funzione $g(t)$ è un infinito di ordine > 1, si ha

$$\int_{1-\delta}^{1+\delta} g(t)\, dt = +\infty, \quad (\delta > 0) \tag{5}$$

Intervallo $[a, +\infty)$, con $a > 1$

Dalla doppia disuguaglianza

$$0 < g(t) < \frac{1}{t(t^2-1)}, \quad \forall t \in (1, +\infty),$$

si ha

$$0 < \int_a^{+\infty} g(t)\, dt < \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)} < +\infty$$

Conclusion 1 *L'integrale*

$$I(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\, dt,$$

converge solo per $x > 1$.

Tuttavia a noi interessa il comportamento di

$$I\left(x^{1/k}\right) = \int_{x^{1/k}}^{+\infty} g(t)\, dt, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

D'altra parte, il calcolo numerico mostra

$$I(x) \ll 1, \quad \forall x \gg 1,$$

come possiamo vedere dal grafico di fig. 4.

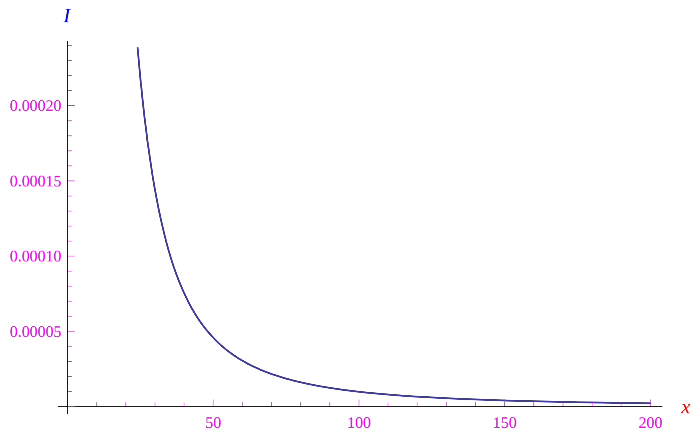

Figura 4: Andamento del grafico della funzione $I(x)$.

In particolare:

$$\lim_{x \to +\infty} I(x) = 0 \tag{6}$$

Le precedenti argomentazioni implicano che assegnato un $k_0 \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che

$$I\left(x^{1/k_0}\right) \ll 1, \quad \forall x \in (1, +\infty),$$

si ha che per $k \gg k_0$ l'integrale $I\left(x^{1/k}\right)$ non è più trascurabile, giacché $x^{1/k} \sim 1$ per $k \gg k_0$. Tale comportamento è illustrato dal grafico di fig. 5. Ciò si verifica in particolare, per $k \to +\infty$

$$\lim_{k \to +\infty} I\left(x^{1/k}\right) = \int_1^{+\infty} g(t)\, dt = +\infty$$

i

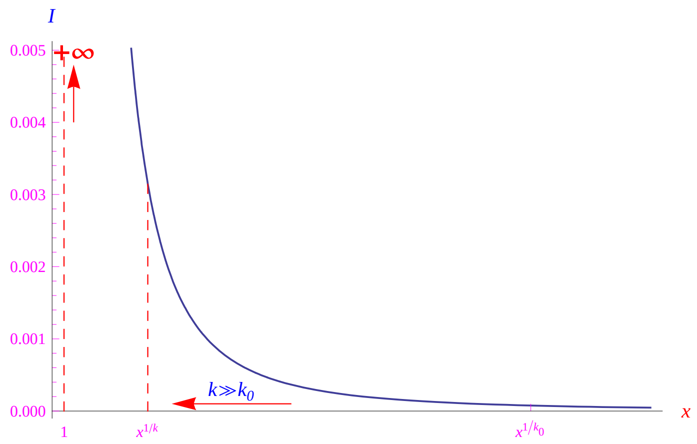

Figura 5: Se $I\left(x^{1/k_0}\right) \ll 1$, riesce $I\left(x^{1/k}\right) \not\ll 1$ per $k \gg k_0$.