Studio di una funzione

Marcello Colozzo

Studiare la seguente funzione:

$$g(t) = \frac{1}{t(t^2-1)\ln t} \tag{1}$$

Insieme di definizione
Riesce manifestamente $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$
Intersezione con gli assi coordinati
Non esistono punti di intersezione con gli assi coordinati.
Segno

$$g(t) > 0, \ \ \forall t \in A$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = \frac{1}{0^+ \cdot (-1) \cdot (-\infty)} = \frac{1}{0 \cdot \infty}$$

Per rimuovere l'indeterminazione, calcoliamo a parte

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t \ln t} = \frac{1}{0 \cdot \infty} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{-1}}{\ln t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = -\infty,$$

per cui

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = +\infty$$

Cioè l'asse delle ordinate è asintoto verticale a sinistra per il grafico della funzione. Valutiamo l'eventuale ordine di infinito, assumendo come infinito di riferimento $u(t) = \frac{1}{t}$. Svincoliamoci dal termine $t^2 - 1$ che non contribuisce all'ordine di infinito, definendo la nuova funzione

$$h(t) = \frac{1}{t \ln t} \tag{2}$$

Segue

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(t)}{[u(t)]^{\alpha > 0}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\alpha - 1}}{\ln t}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $\tau = \ln t$, onde

$$t \to 0^+ \Longrightarrow \tau \to -\infty$$

Il limite diventa

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{t^{\alpha-1}}{\ln t} = \lim_{\tau \to -\infty} \frac{e^{(\alpha-1)\tau}}{\tau} = \begin{cases} \frac{\infty}{\infty}, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{0}{-\infty} = 0, & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{-\infty} = 0, & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \lim_{\tau \to -\infty} \frac{e^{(\alpha-1)\tau}}{\tau} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} (\alpha - 1) \lim_{\tau \to -\infty} e^{(\alpha-1)\tau} = -\infty$$

Riassumendo

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{h(t)}{[u(t)]^{\alpha > 0}} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cioè, per $t \to 0^+$, $h(t)$ è un infinito di ordine superiore ad α, per ogni $0 < \alpha < 1$, ed inferiore a ogni $\alpha \geq 1$. Ne consegue che $h(t)$ (e quindi, $g(t)$) è per $t \to 0^+$ un infinito non dotato di ordine.

Esaminiamo il comportamento per $t \to 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1^-} g(t) &= \frac{1}{1^- \cdot 0^- \cdot 0^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{t\to 1^+} g(t) &= \frac{1}{1^+ \cdot 0^+ \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

Cioè

$$\lim_{t\to 1} g(t) = +\infty \tag{3}$$

Stabiliamo l'eventuale ordine di infinito per $t \to 1$. Al solito, svincoliamoci dai termini che non contribuiscono alla divergenza, ridifinendo

$$h(t) = \frac{1}{(t^2-1)\ln t},$$

e assumendo come infinito di riferimento $u(t) = \frac{1}{|t-1|}$.

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{h(t)}{u(t)^{\alpha>0}} = \lim_{t\to 1^+} \frac{(t-1)^{\alpha-1}}{(t+1)\ln t} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0<\alpha\leq 1 \\ \frac{0}{0}, & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Per $\alpha > 1$

$$\lim_{t\to 1^+} \frac{(t-1)^{\alpha-1}}{(t+1)\ln t} = \frac{0}{0} \overset{\mathrm{H}}{=} (\alpha-1) \lim_{t\to 1^+} \frac{t}{(t+1)(t-1)^{2-\alpha}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 2$$

Procedendo in maniera simile per $t \to 1^-$, si perviene al medesimo risultato, per cui $h(t)$ e quindi $g(t)$, è per $t \to 1$ un infinito del second'ordine.

Studiamo il comportamento all'infinito:

$$\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$$

Stabiliamo l'eventuale ordine di questo infinitesimo, assumendo come infinitesimo di riferimento $u(t) = \frac{1}{t}$. Abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{u(t)^{\alpha>0}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t^2-1)\ln t} = \begin{cases} 0, & \text{se } 0<\alpha\leq 1 \\ \frac{\infty}{\infty}, & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

Per $\alpha > 1$, eseguiamo il cambio di variabile $\tau = \ln t$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(t^2-1)\ln t} &= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-1)\tau}}{\tau(e^{2\tau}-1)} = \lim_{\tau\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-1)\tau}e^{-2\tau}}{\tau(1-e^{-2\tau})} \\ &= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-3)\tau}}{\tau(1-e^{-2\tau})} \\ &= \lim_{\tau\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-3)\tau}}{\tau} \underbrace{\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{(1-e^{-2\tau})}}_{=1}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'altro limite:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{e^{(\alpha-3)\tau}}{\tau} = \begin{cases} 0, \text{ se } 2<\alpha\leq 3 \\ +\infty, \text{ se } \alpha>3 \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{u(t)^{\alpha>0}} = \begin{cases} 0, \text{ se } 2<\alpha\leq 3 \\ +\infty, \text{ se } \alpha>3 \end{cases}$$

Pertanto $g(t)$ è per $t \to +\infty$, un infinitesimo di ordine superiore ad ogni $0 < \alpha \leq 3$, e di ordine inferiore ad ogni $\alpha > 3$. Ne consegue che l'infinitesimo $g(t)$ non è dotato di ordine.

Studio della derivata prima

Abbiamo

$$g'(t) = \frac{1 - 3t^2 \ln t - t^2 + \ln t}{\left[t\left(t^2 - 1\right) \ln t\right]^2} \tag{4}$$

Determiniamo i punti critici:

$$g'(t) = 0 \Longleftrightarrow 1 - 3t^2 \ln t - t^2 + \ln t = 0, \quad t \in A$$

Risolvendo numericamente:

$$g'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = t_1 \simeq 0.292$$

Dall'analisi qualitativa del grafico, ci si convince che t_1 è un punto di minimo relativo. Quindi la funzione è strettamente crescente solo nell'intervallo $(t_1, 1)$.

Studio della derivata seconda

È superfluo, poiché dall'analisi precedente si deduce immediatamente che il grafico volge la concavità verso l'alto. In fig. riportiamo il grafico completo della funzione.

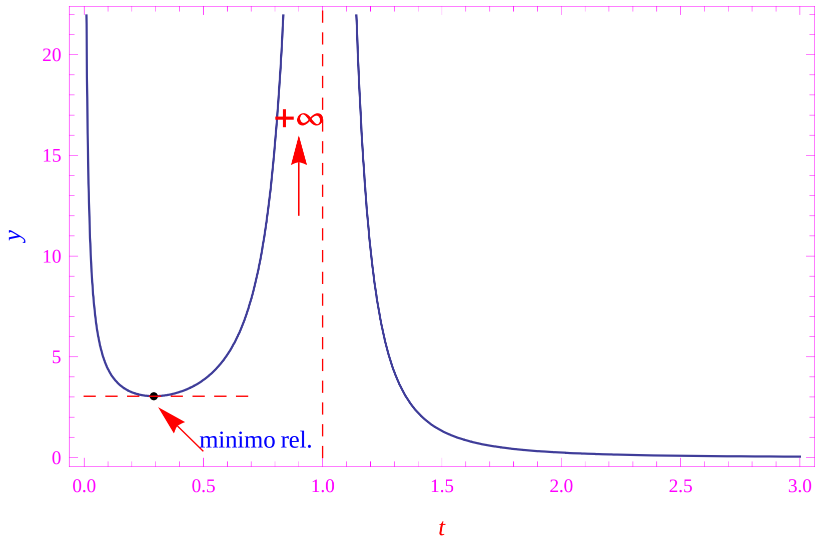

Figura 1: Grafico di $g(t) = \frac{1}{t(t^2-1)\ln t}$.