"Funzione di distribuzione"

Esempio 3.8 - Distribuzione uniforme

Si abbia:

(1) $$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{per} \quad x < a \quad e \quad x > b \\ \varphi(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{per} \quad a \le x \le b \end{cases}$$ Si potrà allora scrivere:

(2) La condizione di normalizzazione si traduce in $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{b-a} = 1$

Esempio 3.9 - Distribuzione normale o di Gauss

Siano date due costanti h e a nel campo $-\infty \le x \le +\infty$. La funzione $\varphi(x)$ è così definita:

(3) $$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{h^2(x-a)^2}$$ Posto $t = h(x-a)$ e $dt = hdx$ risulta:

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{h^2(x-a)^2} dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$ Calcoliamo l'integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad \Rightarrow \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+u^2)} dtdu$$

Se introduciamo le coordinate polari r e ω tali che $\begin{cases} t = r\cos\omega \\ u = r\sin\omega \end{cases}$ per $0 \le r \le +\infty$ e $0 \le \varpi \le 2\pi$

possiamo scrivere:

(5) $$I^2 = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \frac{1}{2} dr^2 = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\pi}$$ Dunque la (4) diventa

(6) la condizione di normalizzazione, che si traduce in $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$

Esempio 3.10 - Distribuzione di Laplace

Siano date due costanti m e a nel campo $-\infty \le x \le +\infty$. La funzione $\varphi(x)$ è così definita:

(7) $$\varphi(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{(x-m)}{a}}$$ integrando risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a} e^{-\frac{(x-m)}{a}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)}{a}} d\left(\frac{x-m}{a}\right)$$ posto $t = \frac{x-m}{a}$ risulta che

la condizione di normalizzazione si traduce in $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = 1$