

Non invertibilità del Teorema di Lagrange

Marcello Colozzo - <http://www.extrabyte.info>

Il teorema di Lagrange non è invertibile:

$$\left. \begin{array}{l} \xi_0 \text{ è un punto} \\ \text{di equilibrio stabile} \end{array} \right) \not\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \xi_0 \text{ è punto di minimo relativo} \\ \text{per } V(x) \end{array} \right)$$

In altri termini, la condizione “ ξ_0 è punto di minimo relativo per $V(x)$ ” è sufficiente ma non necessaria affinché ξ_0 sia di equilibrio stabile. L'esempio seguente mostra che la predetta condizione diviene necessaria aggiungendo l'ipotesi di analiticità della funzione energia potenziale.

Determiniamo gli eventuali punti di equilibrio stabile del seguente sistema di equazioni differenziali (in unità adimensionali):

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x) \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad (1)$$

dove $F(x)$ deriva dall'energia potenziale

$$V(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin \frac{10}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Da [questo studio di funzione](#) vediamo che $V(x)$ non è analitica (è di classe C^∞) e che il punto estremaie $\xi_0 = 0$ non è un punto estremante (i.e. di max o minimo relativo), ma è comunque punto critico dell'energia

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) \quad (3)$$

In fig. 1 tracciamo il grafico della funzione, mentre in fig. 2 è plottata l'energia meccanica

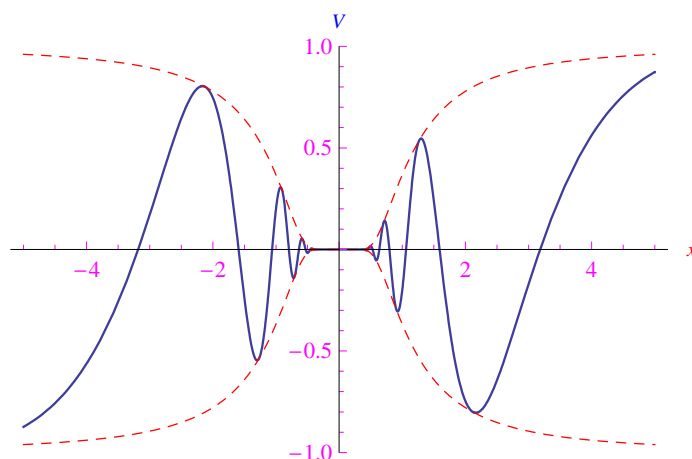


Figura 1: Andamento dell'energia potenziale $V(x)$.

Per studiare la natura di ξ_0 non è possibile applicare la definizione di stabilità secondo Lyapunov, giacché il sistema non è integrabile per quadrature. Assumiamo quindi, come parametro libero il valore dell'energia meccanica E , in quanto costante del moto, distinguendo i due casi:

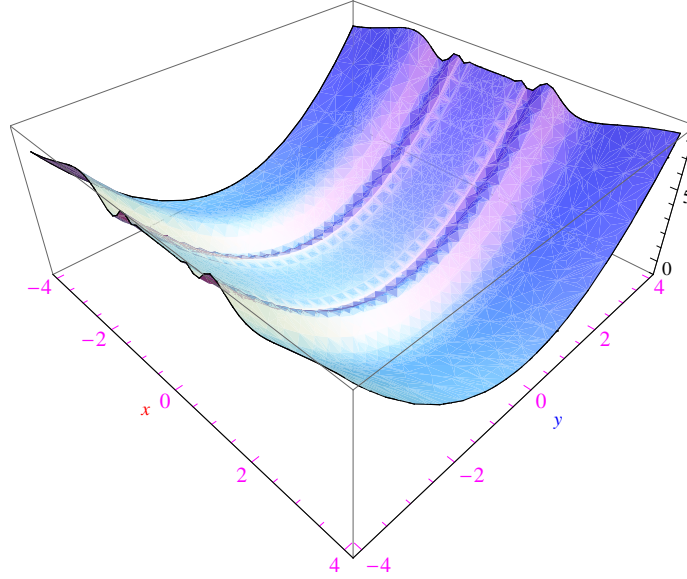


Figura 2: Andamento dell'energia meccanica $E(x, y)$.

1. $0 < E < 1$
2. $-1 < E < 0$

Nel primo caso abbiamo la configurazione di fig. 3, ove con $x_E > 0$ denotiamo la radice dell'equazione $V(x) = E$ più vicina a ξ_0 .

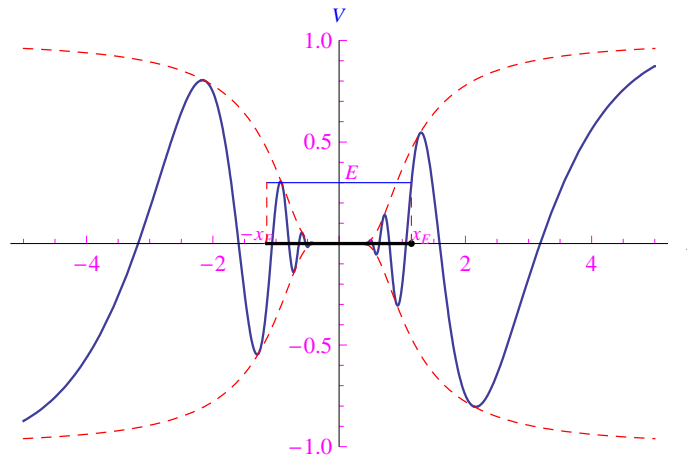


Figura 3: Intervallo (in grassetto) contenuto nella regione classicamente accessibile.

Precisamente, stiamo determinando per un assegnato valore dell'energia meccanica $E \in (0, 1)$ la regione classicamente accessibile:

$$\Lambda(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E - V(x) \geq 0\}$$

Ne consegue $(-x_E, x_E) \subset \Lambda(E)$, per cui

$$x(0) \in (-x_E, x_E) \implies x(t) \in (-x_E, x_E), \quad \forall t \geq t_0$$

Inoltre

$$x \in (-x_E, x_E) \implies E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = E, \quad \text{con } -E < V(x) < E$$

$$\xRightarrow{V(x) > -E} E > \frac{y^2}{2} - E \implies y^2 - 4E < 0 \implies |y| < 2E, \quad \forall E \in (0, 1)$$

Denotando con R_E l'intorno rettangolare dell'origine, dato da

$$R_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < x_E, |y| < 2E\},$$

si ha

$$\forall E \in (0, 1), \exists \delta_E \in (0, E) \mid (x(0), y(0)) \in R_{\delta_E} \implies (x(t), y(t)) \in R_E, \quad \forall t \geq 0$$

Passiamo al caso $-1 < E < 0$. Denotiamo con $x'_E, x''_E > 0$ due radici consecutive dell'equazione $V(x) = E$, osservando preliminarmente che dal momento che $|E|$ può essere arbitrariamente piccolo, l'intervallo (x'_E, x''_E) riesce arbitrariamente vicino all'origine $(0, 0)$. Abbiamo

$$(x'_E, x''_E) \subset \Lambda(E) \implies x(0) \in (x'_E, x''_E) \implies x(t) \in (x'_E, x''_E), \quad \forall t \geq 0$$

come illustrato in fig. 4.

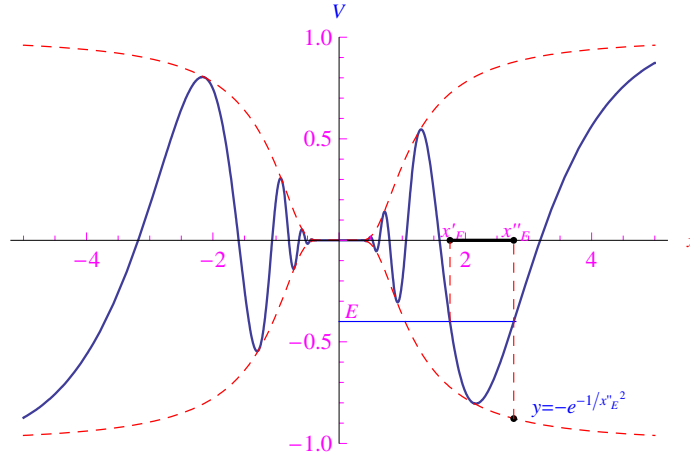


Figura 4: Intervallo (in grassetto) contenuto nella regione classicamente accessibile.

Osservando che

$$x \in (x'_E, x''_E) \implies V(x) > -e^{-1/x_E'^2},$$

si ha

$$x \in (x'_E, x''_E) \implies E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = E$$

$$\xRightarrow{V(x) > -e^{-1/x_E'^2}} E > \frac{y^2}{2} - e^{-1/x_E'^2} \implies \frac{y^2}{2} < E + e^{-1/x_E'^2}$$

$$\implies |y| < \sqrt{2(E + e^{-1/x_E'^2})}$$

Consideriamo il seguente intorno rettangolare di $(0, 0)$

$$R_{|E|} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x'_E < x < x''_E, |y| < \sqrt{2(E + e^{-1/x_E'^2})} \right\}$$

Riesce

$$\forall |E| \in (0, 1), \exists \delta_{|E|} \in (0, |E|) \mid (x(0), y(0)) \in R_{\delta_{|E|}} \implies (x(t), y(t)) \in R_{|E|}, \forall t \geq t_0$$

Ne concludiamo che $\xi_0 = 0$ è una posizione di equilibrio stabile, pur non essendo punto di minimo relativo per $V(x)$. Riportiamo infine il diagramma orario, la velocità in funzione del tempo, e la curva di fase, ottenuti per integrazione numerica con le condizioni iniziali $x(0) = 1, y(0) = 1$ (figg. 5-6)

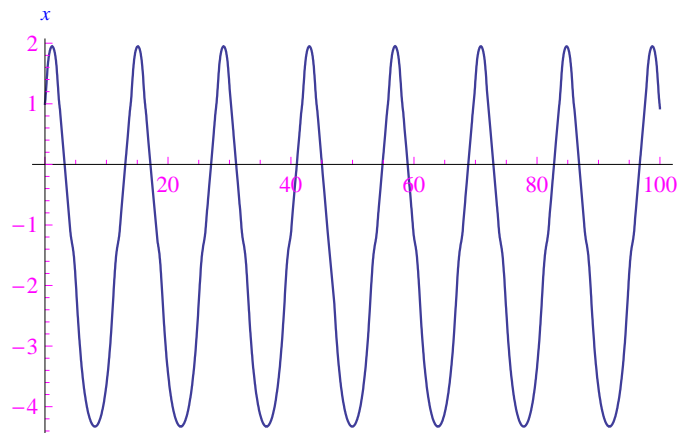


Figura 5: Grafico di $x(t)$.

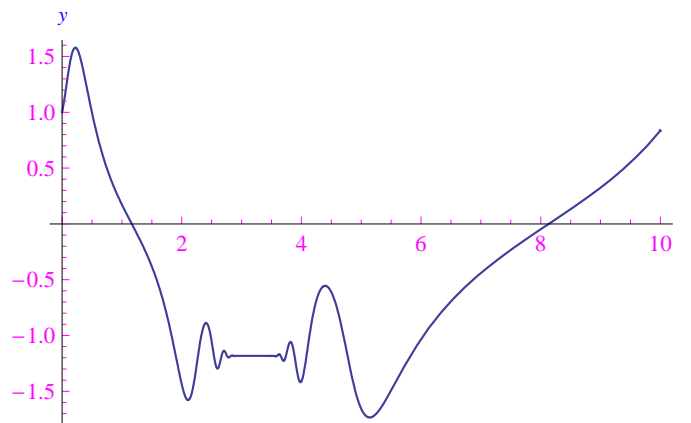


Figura 6: Grafico di $y(t)$.

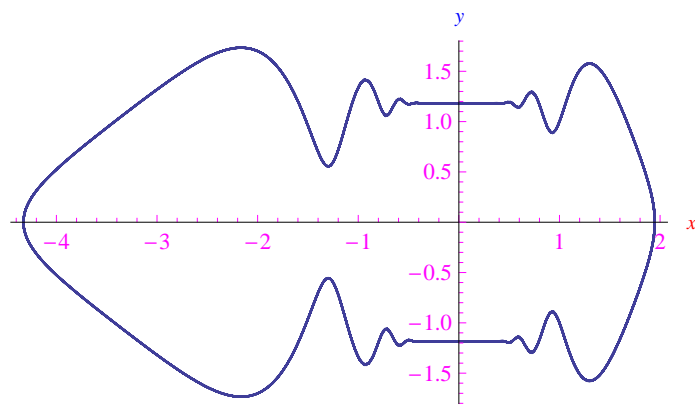


Figura 7: Curva di fase per la condizione iniziale $x(0) = 1, y(0) = 1$.