Punti critici e punti di equilibrio. Piano delle fasi

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Per studiare la stabilità di un punto di equilibrio bisogna innanzitutto ricercare tali punti che per quanto visto, sono tutti e soli i punti critici dell'energia $E(x,y)$:

$$\nabla E = (0,0) \Longleftrightarrow V'(x) = 0, \; y = 0$$

ovvero i punti estremali della funzione energia potenziale $V(x)$. Per poter applicare la definizione dobbiamo conoscere la soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema per assegnate condizioni iniziali. Ciò è possibile solo nei casi più semplici ossia in quelli in cui il predetto sistema di equazioni differenziali è integrabile per quadrature, come nell'esempio dell'oscillatore armonico. In generale, è necessario un criterio di stbilità che non richiede l'integrazione del suddetto sistema. Nel 1644 Torricelli sapeva che la posizione di un sistema di corpi sottoposto alla gravità sarebbe stata stabile se il centro di gravità del sistema avesse occupato le posizioni più basse possibili. Lagrange generalizzò il principio di Torricelli enunciando un criterio di stabilità:

Teorema 1 *(Teorema di Lagrange)*

$$\left(\begin{array}{c} \xi_0 \text{ è punto di minimo} \\ \text{relativo proprio per } V(x) \end{array} \right) \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \left(\begin{array}{c} \xi_0 \text{ è una posizione di equilibrio} \\ \text{stabile secondo Lyapunov} \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Per ipotesi $V'(\xi_0) = 0$, e senza perdita di generalità $V''(\xi_0) > 0$. È facile verificare che $(\xi_0, 0)$ è punto di minimo relativo proprio per l'energia meccanica

$$E(x,y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x)$$

Basta applicare il test dell'hessiano, calcolando dapprima:

$$\left.\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|_{(\xi_0,0)} = V''(\xi_0) > 0, \; \left.\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\right|_{(\xi_0,0)} = \left.\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}\right|_{(\xi_0,0)} = 0\,, \; \left.\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right|_{(\xi_0,0)} = m$$

Quindi

$$H(\xi_0, 0) = \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|_{(\xi_0,0)} & \left.\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}\right|_{(\xi_0,0)} \\ \left.\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}\right|_{(\xi_0,0)} & \left.\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right|_{(\xi_0,0)} \end{vmatrix} = mV''(\xi_0) > 0$$

Abbiamo allora

$$H(\xi_0, 0) > 0, \; \left.\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right|_{(\xi_0,0)} = V''(\xi_0) > 0,$$

per cui $(\xi_0, 0)$ è punto di minimo relativo proprio per $E(x,y)$. Qui il valore assunto dalla funzione è

$$E(\xi_0, 0) = V(\xi_0) \equiv E_0$$

Per un assegnato $\varepsilon > 0$, consideriamo l'insieme di punti del piano delle fasi:

$$J_\varepsilon(\xi_0, 0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x,y) < E_0 + \varepsilon \right\}$$

che è manifestamente un intorno di $(\xi_0, 0)$ di raggio ε, dove per raggio intendiamo il massimo della funzione distanza $d(x,y)$ tra un generico punto $(x,y) \in J_\varepsilon(\xi_0, 0)$ e la frontiera ∂J_ε,

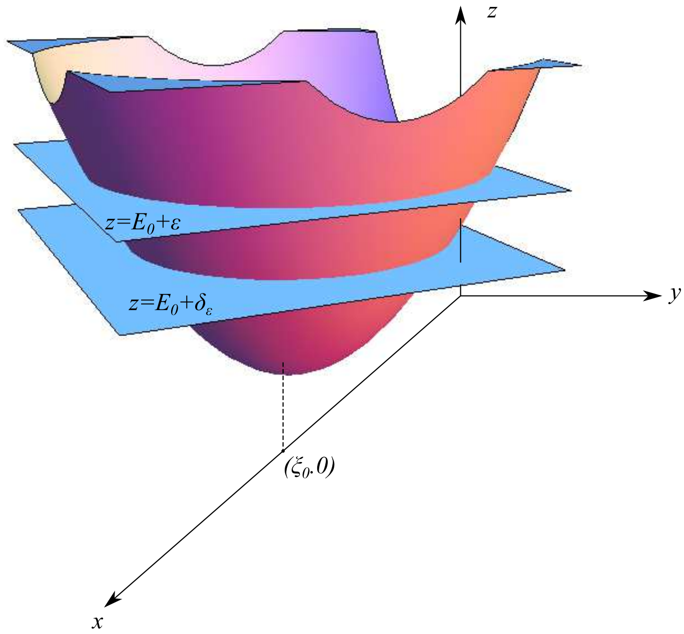

Figura 1: Dimostrazione del teorema di Lagrange.

ove quest'ultima è la curva di fase se l'energia è $E_0 + \varepsilon$. In corrispondenza di $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ tale che

$$I_{\delta_\varepsilon}(\xi_0, 0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) < E_0 + \delta\right\} \subset J_\varepsilon(\xi_0, 0)$$

che è un intorno di $(\xi_0, 0)$ e di raggio δ_ε (fig. 1).

Segue necessariamente

$$(x_0, y_0) \in I_{\delta_\varepsilon}(\xi_0, 0) \Longrightarrow (x(t), y(t)) \in J_\varepsilon(\xi_0, 0), \ \ \forall t \geq t_0,$$

onde l'asserto. ■