Esercizio di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Studiare la stabilità del sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x) \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \; y(0) = y_0 \tag{1}$$

dove $F(x)$ deriva dall'energia potenziale (adimensionale)

$$V(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \sin\left(\frac{10}{x}\right), & se\ x \neq 0 \\ 0, \quad se\ x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Soluzione

Studiamo preliminarmente la funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \tag{3}$$

Insieme di definizione

f è definita in

$$X = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$$

La funzione è periodica di periodo π, per cui limitiamoci a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$.**Intersezione con gli assi**

$f(x) > 0 \; \forall x$ per cui non esistono intersezioni con l'asse x. In $x = 0$ non è definita, onde non ci poniamo il problema dell'intersezione con l'asse y.

Simmetrie

La funzione è pari

$$f(-x) \equiv f(x)$$

Quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Inoltre $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Prolungando per continuità

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Derivata prima

$$f'(x) = 2\frac{\cos x}{\sin^3 x} f(x) \tag{5}$$

Non è definita in $x = 0$. Applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{\arcsin \frac{1}{t}}}{e^{t^2}} = 0 \quad \text{(per confronto tra infiniti)}$$

Quindi

$$f'(0) = 0$$

Dalla (5)

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \cos x}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}}{\sin^3 x}}_{=\lambda}$$

Per calcolare λ poniamo $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lambda = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0$$

Allo stesso modo $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$, per cui

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$$

Conclusione: la derivata $f'(x)$ è continua in $x = 0$. Studiamo il segno

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\cos x}{\sin^3 x} > 0 \underset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{\iff} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ne segue che f è strettamente crescente in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo proprio. Inoltre $f'\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, cioè il grafico di f parte dai punti $\left(\pm\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}\right)$ con tangente orizzontale.

Derivata seconda

$$f''(x) = -2f(x)\frac{\sin x \sin^3 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^6 x} + 2\frac{\cos x}{\sin^3 x} f'(x)$$

Facendo i dovuti passaggi e semplificazioni:

$$f''(x) = 2e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \frac{2 + 2\sin^4 x - 5\sin^2 x}{\sin^6 x}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 0 \cdot \infty$$

Per rimuovere l'indeterminazione, poniamo $t = \frac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{t^2\left(2t^4 - 5t^2 + 2\right)}{e^t} = 0$$

Quindi

$$f''(x) = 0$$

Derivata di ordine n

Calcolando le derivate di ordine successivo, si perviene

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cosicché la funzione assegnata pur essendo di classe C^∞ non è analitica.

Punti di flesso

Dobbiamo trovare le radici dell'equazione

$$f''(x) = 0$$

Cioè

$$2 + 2\sin^4 x - 5\sin^2 x = 0$$

Ponendo $t = \sin^2 x$ e risolvendo

$$x_1 = -\frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{4}$$

che sono punti di flesso a tangente obliqua

$$F_1\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{e^2}\right),\quad F_2\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{e^2}\right)$$

Tracciamento del grafico

È in fig. 1.

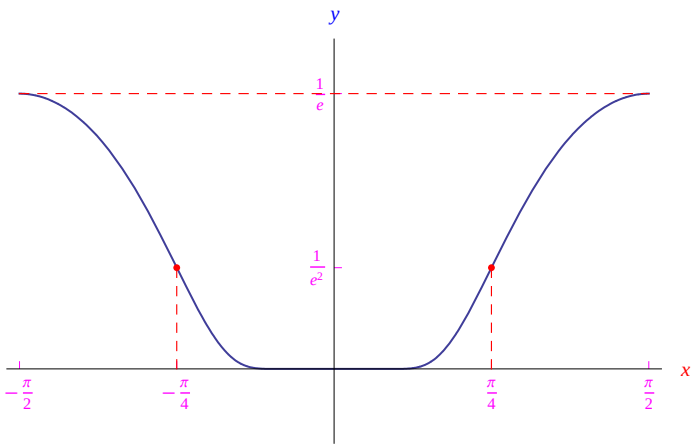

Figura 1: Grafico di $f(x) = e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Ora siamo in grado di graficare l'energia potenziale, in quanto oscilla tra le curve $y = \pm e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$, come mostrato in fig. 2.

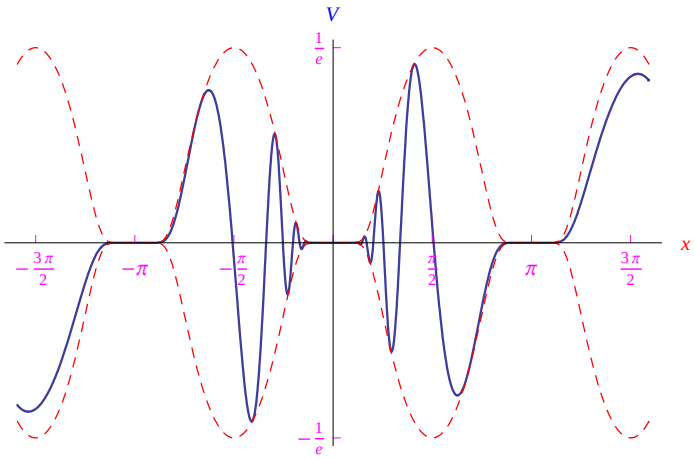

Figura 2: Grafico dell'energia potenziale $V(x)$ data dalla (2).

Per quanto riguarda il comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\sin\frac{10}{x}\right) = 0,$$

in quanto abbiamo il prodotto di una funzione non regolare $\left(e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right)$ e di una funzione infinitesima. Tenendo conto della non analiticità di $e^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$, si ha che $V(x)$ non è analitica, ma comunque di classe C^∞. Il punto $\xi_0 = 0$ non è di minimo relativo, giacché in ogni intorno di ξ_0 cadono punti in cui $f(x) \geq f(\xi_0)$ e punti x tali che $f(x) < f(\xi_0)$. Tuttavia, ξ_0 è punto di equilibrio stabile, come mostra l'argomentazione seguente. Fissiamo innanzitutto i valori dell'energia meccanica; precisamente consideriamo i casi:

1. $0 < E < \frac{1}{e}$
2. $-\frac{1}{e} < E \leq 0$

Nel caso 1 denotiamo con $x_E > 0$ la radice dell'equazione $E - V(x) = 0$ più prossima a $\xi_0 = 0$. Dalla fig. 3 vediamo che il particolare valore scelto implica $(-x_E, x_E) = \Lambda(E)$ regione classicamente accessibile. Ne segue che il punto materiale compie un moto periodico tra $-x_E$ e $+x_E$ con periodo

$$T = 2\int \frac{dx}{\sqrt{2\left[E - V(x)\right]}}$$

Quindi

$$x(0) \in (-x_E, x_E) \Longrightarrow x(t) \in (-x_E, x_E)\,,\ \forall t \geq 0$$

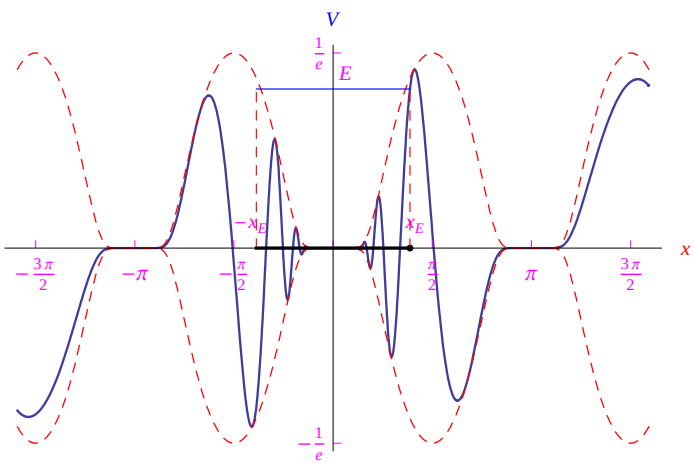

Figura 3: Assegnato un valore di $E \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, possiamo determinare la regione classicamente accessibile $\Lambda(E)$. L'intervallo grassettato $(-x_E, x_E) = \Lambda(E)$.

Riguardo alla grandezza y:

$$\begin{aligned} x \in (-x_E, x_E) &\Longrightarrow E(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = E \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \\ &\Longrightarrow -E < V(x) < E \Longrightarrow E = \frac{y^2}{2} + V(x) > \frac{y^2}{2} - E \\ &\Longrightarrow |y| < 2\sqrt{E} \end{aligned}$$

Consideriamo l'intorno rettangolare del punto $(0,0)$

$$R_E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < x_E,\ \ |y| < 2\sqrt{E}\right\}$$

Segue

$$\forall E \in \left(0, \frac{1}{e}\right),\ \exists \delta_E \in \left(0, \min\left\{x_E, 2\sqrt{E}\right\}\right) \mid (x(0), y(0)) \in R_{\delta_E} \Longrightarrow (x(t), y(t)) \in R_E,\ \forall t \geq 0$$

dove

$$R_{\delta_E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \delta_E,\ \ |y| < \delta_E\right\}$$

i.e. un intorno quadrato di $(0,0)$ di ampiezza δ_E. Ne consegue che per $E \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ il punto $\xi_0 = 0$ è di equilibrio stabile. Passiamo al caso 2. Siano $0 < x'_E < x''_E$ due radici consecutive dell'equazione $E - V(x) = 0$, che individuano la regione accessibile (fig. 4). Seguendo le stesse argomentazioni dell'esempio precedente, si giunge alla conclusione che $\xi_0 = 0$ è un punto di equilibrio stabile.

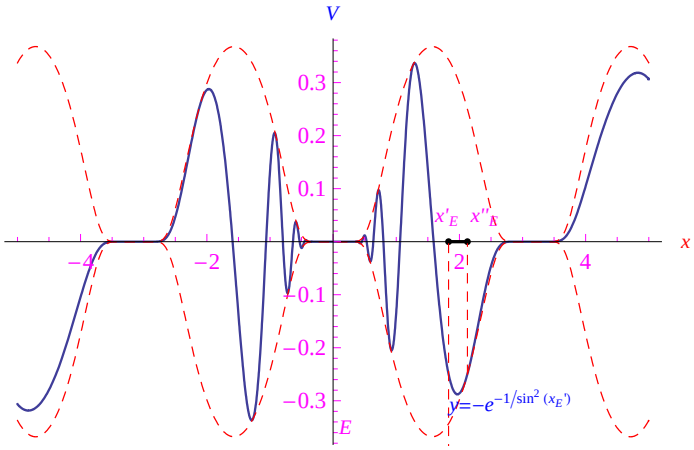

Figura 4: Caso $E \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right]$.

Abbiamo quindi provato la stabilità del punto di equilibrio senza integrare le equazioni del moto, formando in tal modo un controesempio all'invertibilità del teorema di Lagrange. Volendo è possibile integrare numericamente le predette equazioni, con una condizione iniziale

$$x(0) = x_0,\ \ y(0) = y_0$$

che in tal modo determina univocamente l'energia meccanica del sistema:

$$E = \frac{y_0^2}{2} + V(x_0),$$

potendo discutere i due casi $E \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ed $E \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right]$, mostrando la stabilità dell'equilibrio attraverso il tracciamento della curva di fase del sistema. Ad esempio, utilizzando il software Mathematica e integrando con condizioni iniziali

$$x(0) = 0.3,\ \ y(0) = 0.4, \tag{6}$$

otteniamo la curva di fase plottata in fig. 5.

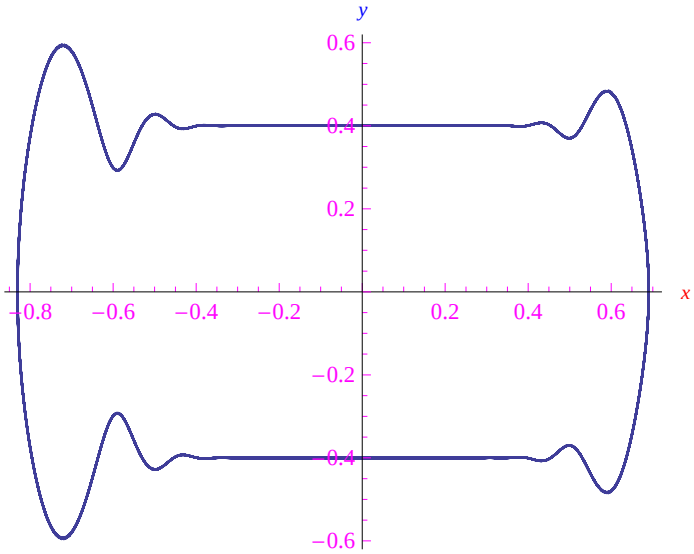

Figura 5: Andamento della curva di fase per condizioni iniziali (6).