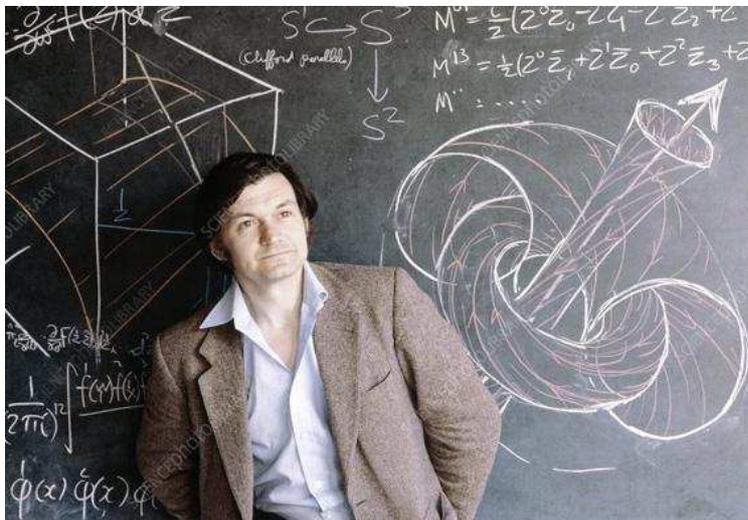


## Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

### Quella maledetta rete di spin (Una breve introduzione agli spin networks di Penrose)

Marcello Colozzo



## Indice

1	Premessa	2
2	Il momento angolare di spin	3
3	Gli spin networks di Penrose	4
4	Collegamenti con la Quantum Computing	6
5	Limite dei grandi $n$	9
6	Alcune riflessioni	10

# 1 Premessa

Concettualmente, il paradigma degli spin networks di Penrose [1] non è poi così complicato. Per comprenderne le basi consideriamo un sistema quanto-meccanico non relativistico, composto da una particella di massa  $m$  e spin  $s$ . In generale, l'operatore hamiltoniano di tale sistema si esprime nel modo che segue:

$$\hat{H} = \hat{H}^{(orb)} + \hat{H}^{(spin)} \quad (1)$$

dove il primo operatore a secondo membro rappresenta la parte orbitale, mentre il secondo operatore è l'hamiltoniano dei soli gradi di libertà di spin. Lo spazio di Hilbert associato al sistema è

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(orb)} \otimes \mathcal{H}^{(spin)} \quad (2)$$

Se la particella è sottoposta a un campo conservativo di energia potenziale  $V(\mathbf{x})$ , si ha:

$$\hat{H} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})}_{=\hat{H}^{(orb)}(\mathbf{x},\mathbf{p})} + \hat{H}^{(spin)} \quad (3)$$

e

$$\mathcal{H} = \underbrace{L^2(\mathbb{R}^3)}_{=\mathcal{H}^{(orb)}} \otimes \underbrace{\mathbb{C}^{2s+1}}_{=\mathcal{H}^{(spin)}}, \quad (4)$$

essendo  $L^2(\mathbb{R}^3)$  lo spazio di Hilbert delle funzioni da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{C}$ , di modulo quadro **sommabile**. Ne consegue che in un istante di tempo assegnato (che può essere l'istante iniziale in cui il sistema è preparato in una sovrapposizione lineare di autostati di una qualche osservabile, quale ad esempio, l'energia) la funzione d'onda si fattorizza come segue

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{S}) = \psi(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{S}) \quad (5)$$

dove abbiamo inglobato nel simbolo  $\mathbf{S}$ , le variabili di spin. Qui  $\psi(\mathbf{x})$  è la funzione d'onda dei soli gradi di libertà orbitali, mentre  $\chi(\mathbf{S})$  è la funzione d'onda di spin. La predetta fattorizzazione permette di tralasciare i gradi di libertà orbitali, in tutte quelle applicazioni basate esclusivamente sui gradi di libertà di spin. Matematicamente, ciò equivale ad eseguire nella (3) l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{H} = \hat{H}^{(spin)} \quad (6)$$

Il termine  $V(\mathbf{x})$  sparisce in quanto una particella di massa infinita è priva di gradi di libertà cinetici. Nel paradigma newtoniano, ciò è una conseguenza del **principio di inerzia**, per cui una qualunque forza

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{x})$$

produce un'accelerazione nulla su una particella di massa infinita:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{0}$$

Un paio di osservazioni:

1. L'operazione di passaggio al limite per  $m \rightarrow +\infty$  è puramente formale.

2. Potrebbe apparire sorprendente nominare il paradigma newtoniano. Tuttavia, dobbiamo ricordare che la **Meccanica quantistica non relativistica** poggia su tale paradigma, almeno per quanto riguarda oggetti del tipo forza, energia potenziale, massa inerziale.

Riassumendo simbolicamente:

$$\mathcal{H} = \nearrow \otimes \mathcal{H}^{(spin)} \quad (7)$$

dove la freccia indica che abbiamo cancellato il termine orbitale. Tale approccio funziona anche se abbiamo un sistema di  $N$  spin, ossia uno *spin network*:

$$\mathcal{H} = \nearrow \otimes \mathcal{H}^{(spin \ network)} \quad (8)$$

## 2 Il momento angolare di spin

In questo numero richiamiamo velocemente alcune nozioni di **meccanica quantistica**. Ricordiamo innanzitutto che lo spin è un'osservabile quantistica priva di analogo classico. In altri termini, contrariamente al caso classico, non possiamo associare allo spin quantistico una qualche rotazione, come invece avviene ad esempio, in una trottola. D'altra parte, abbiamo visto nel numero precedente (eq. 4) che lo spazio di Hilbert che definisce gli stati di spin per un sistema di spin  $s$ , è  $\mathbb{C}^{2s+1}$ , ove è definito l'operatore autoaggiunto associato all'osservabile spin:

$$\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z),$$

dove  $\hat{S}_k$  sono le sue componenti rispetto a una opportuna terna di riferimento inerziale. Per la relazione di indeterminazione di Heisenberg, non è possibile misurare simultaneamente e con precisione assoluta una qualunque coppia di componenti cartesiane della grandezza vettoriale  $\mathbf{S}$ . D'altra parte

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_k] = 0, \quad \forall k \in \{x, y, z\},$$

da cui l'esistenza di un sistema ortonormale completo di autovettori simultanei (base ortonormale di  $\mathbb{C}^{2s+1}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{S}^2 |s, s_k\rangle &= \hbar^2 s(s+1) |s, s_k\rangle \\ \hat{S}_k |s, s_k\rangle &= \hbar s_k |s, s_k\rangle \end{aligned}$$

Come è noto, per un assegnato  $s$

$$s_k = \underbrace{-s, -s+1, \dots, s-1, s}_{2s+1}$$

Cioè il numero quantico  $s_k$  può assumere  $2s+1$  valori distinti (che è proprio la dimensione del corrispondente spazio di Hilbert).

Ad esempio, per un sistema di spin  $1/2$  abbiamo che lo spin può assumere solo due valori ( $\pm\hbar/2$ ). Per essere più precisi, è la componente del vettore  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  secondo uno degli assi coordinati, che può assumere i predetti valori. Senza perdita di generalità, possiamo riferirci all'asse  $z$ , per cui si presenta la situazione illustrata in fig. 1. Per quanto precede, ci si riferisce ad autostati simultanei delle grandezze  $S^2$  e  $S_k$ . Ricordiamo che  $S_k$  è una qualunque componente cartesiana di  $\mathbf{S}$ , e noi per comodità assumiamo  $k = z$ .

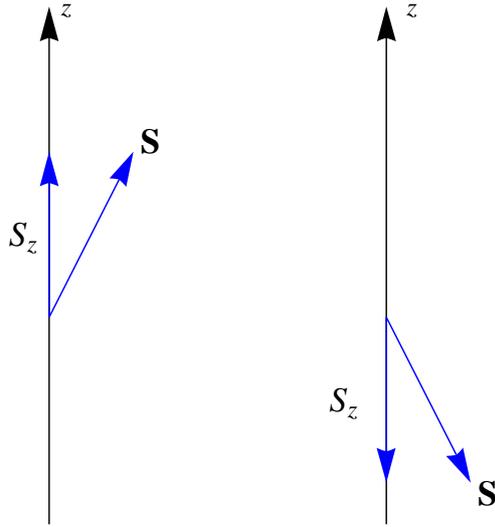


Figura 1: Valori assunti dalla componente  $S_z$  del momento angolare di spin  $\mathbf{S}$  di un sistema quantistico  $1/2$  (ad esempio, un elettrone).

### 3 Gli spin networks di Penrose

L'idea di Penrose consiste non nel non tener conto di  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , ma di asserire che il 3-spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ , “emerge” da uno spin network. In simboli:

$$\mathcal{H}^{(\text{spin network})} \implies \mathbb{R}^3$$

Per comprendere come un ente del tipo spin network sia in grado di generare uno spazio euclideo, **dobbiamo sbarazzarci della fisicità degli “oggetti” dotati di momento angolare di spin**. Siamo, infatti, abituati a pensare ad elettroni, protoni, neutroni ( $s = 1/2$ ). Penrose non lo dice, ma quasi ci obbliga a pensare ad oggetti *non fisici* ovvero astratti e comunque dotati di spin. Ogni oggetto è una *n-unità*, dove  $n$  è un intero naturale tale che

$$s\hbar = n\frac{\hbar}{2},$$

essendo  $s$  lo spin della unità considerata. Incidentalmente, Penrose utilizza il simbolo  $j$  per denotare lo spin totale. Ma a nostro avviso, tale simbolo genera confusione con il momento angolare totale (spin + orbita), per cui è preferibile utilizzare  $s$ . Riassumendo:

$$0 - \text{unità} \implies s = 0$$

$$1 - \text{unità} \implies s = \frac{1}{2}$$

$$2 - \text{unità} \implies s = 1$$

...

Segue

$$n \text{ è pari} \implies \text{bosoni}$$

$$n \text{ è dispari} \implies \text{fermioni}$$

Ma ancora una volta non dobbiamo pensare a particelle, nel senso fisico del termine. La rete più semplice è costituita da due  $n$ -unità. Ad esempio, possiamo avere una coppia di due 1-unità che denotiamo con  $A$  e  $B$ . Quindi  $A$  ha spin

$$s_1 = 1/2 \implies n = 1$$

Idem per  $B$ :

$$s_2 = 1/2 \implies n = 1$$

Dalla teoria della composizione del momento angolare, sappiamo che lo spin totale può essere  $s = 0$  o  $s = 1$ . Nel primo caso, abbiamo che la coppia  $(A, B)$  è **entangled**, ed è proprio il caso che ci interessa. Rappresentiamo tale stato quantico nel grafo di fig. 2.

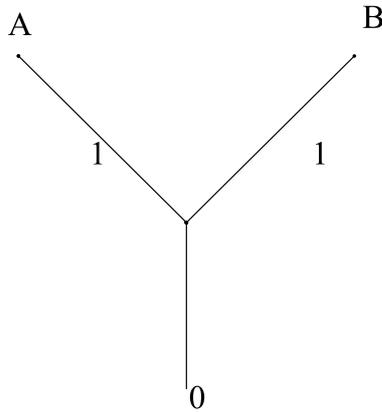


Figura 2:  $A$  e  $B$  sono due 1-unità nello stato di spin totale  $s = 0$ . Il simbolo 1 denota il numero quantico  $n$  tale che  $s\hbar = \frac{n}{2}\hbar$ .

Un errore comune è di pensare ad  $A$  e  $B$  immersi in un qualche spazio di background. Ma ciò è sbagliato perché stiamo cercando di far emergere tale spazio dalle interazioni tra gli spin del network. In questo esempio, lo spazio è semplicemente il grafo disegnato. Possiamo aggiungere una seconda coppia di due 1-unità entangled, ad esempio  $(C, D)$ , come mostrato in fig. 3.

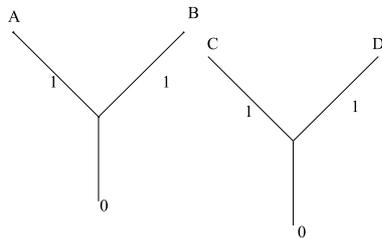


Figura 3: Qui abbiamo una seconda coppia entangled.

Le 1-unità  $B$  e  $C$  possono a loro volta combinarsi, ma non deve trarre in inganno la “vicinanza” tra tali unità, giacché ciò implicherebbe ancora una volta, uno spazio di background (addirittura uno **spazio metrico**). Gli stati di spin totale per la nuova coppia sono:

$$s = 0 \implies n = 0$$

$$s = 1 \implies n = 2$$

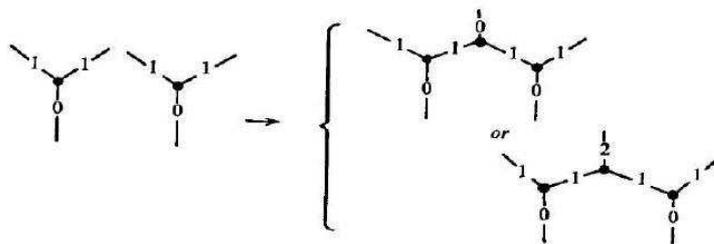


Figura 4: Gli stati quantici possibili, dalla combinazione delle coppie entangled.

Cioè sono permessi solo i numeri quantici  $n = 0$  e  $n = 2$  (fig. 4)

Abbiamo quattro 1-unità, quindi abbiamo le probabilità:

$$\begin{cases} P(n = 0) = \frac{1}{4} \\ P(n = 2) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Si noti che tali probabilità non sono indipendenti. Precisamente

$$(B, C) \text{ è una } 0\text{-unità} \implies (A, D) \text{ è una } 0\text{-unità}$$

e viceversa.

## 4 Collegamenti con la Quantum Computing

Da premettere che stiamo in alto mare per ciò che riguarda gli spin networks di Penrose. Tuttavia, è preferibile procedere con i classici piedi di piombo, anche perchè a nostro avviso potrebbe esserci un legame inaspettato con la Quantum Computing. Cambieremo la simbologia adottata nel numero precedente, in modo da rendere più chiari i concetti. Tra l'altro, la matematica che c'è dietro gli spin networks è tutt'altro che complicata, dando però per scontate le regole di composizione del momento angolare in meccanica quantistica non relativistica (regole tutt'altro che facili da dimostrare, per cui si raccomanda di consultare un buon testo di meccanica quantistica).

Ricapitolando, Penrose considera un insieme di "oggetti quantistici" dotati di momento angolare di spin. Quest'ultimo è individuato da un numero quantico  $s$  che può assumere valori interi o semi-interi, espressi in unità  $\hbar$ , dove

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \tag{9}$$

essendo  $h$  la costante di Planck. Penrose definisce in funzione di  $s$ , un nuovo numero quantico  $n$

$$n = 2s, \tag{10}$$

che assume solo valori interi:

$$s = 0 \implies n = 0$$

$$s = \frac{1}{2} \implies n = 1$$

...

Penrose chiama i singoli oggetti  $n$ -unità. Noi preferiamo utilizzare il simbolo

$$U^{(n)}$$

eventualmente dotato di apice

$$U_k^{(n)}$$

dove l'indice  $k$  enumera le singole unità.

**Definizione 1** Si dice **spin network** l'insieme

$$\Sigma = \left\{ U_k^{(n)} \mid n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \right\} \quad (11)$$

Per quanto precede, non esiste uno spazio di background. D'altra parte, l'insieme  $\Sigma$  può essere dotato di una struttura topologica, per cui un qualunque spin network è uno **spazio topologico**. Nello specifico, Penrose assegna a  $\Sigma$  la struttura topologica di **grafo**.

Consideriamo il caso  $n = 1$ :

$$U^{(1)}$$

Qui è  $s = 1/2$ , per cui – come è ben noto dalla meccanica quantistica – il corrispondente spazio di Hilbert è  $\mathbb{C}^2$ , mentre il più generale vettore di stato si scrive (in notazione di Dirac):

$$|\alpha\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle \quad (12)$$

Tale vettore di stato descrive uno stato quantistico di spin  $s = 1/2$ , mentre i vettori componenti  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ , esprimono stati quantistici in cui la componente del momento di spin lungo una direzione orientata assegnata, assume rispettivamente i valori

$$+\frac{\hbar}{2}, \quad -\frac{\hbar}{2}$$

Riappare, dunque, il problema della presenza di una direzione in assenza di uno spazio di background. Questa contraddizione viene rimossa attraverso l'argomentazione che stiamo per esporre. Nel frattempo ricordiamo che lo stato  $|\alpha\rangle$  si assume normalizzato a 1, per cui i numeri complessi della combinazione lineare sono tali che

$$|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$$

ed esprimono le probabilità di “trovare”  $|+\rangle$  o  $|-\rangle$  (si notino le virgolette, giacchè si ripresenta il problema della direzione). Ma per quanto precede,  $U^{(1)}$  non è un sistema fisico. L'unica cosa che ci viene in mente è espressa dalla seguente identità:

$$U^{(1)} = \text{quantum bit}$$

Per essere più specifici, dal punto di vista della teoria dell'informazione le variabili dicotomiche  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  implementano una coppia di variabili *statisticamente indipendenti*. Infatti:

**Definizione 2** Il **bit** è la quantità minima di informazione necessaria per distinguere due eventi statisticamente indipendenti relativi a un assegnato processo aleatorio.

Ad esempio considerando come processo aleatorio il lancio di una moneta, si ha che gli eventi statisticamente indipendenti relativi a tale processo, sono Testa e Croce ossia i possibili risultati del lancio medesimo. Quindi

$$\begin{aligned} \text{Testa} &\rightarrow \text{bit } 0 \\ \text{Croce} &\rightarrow \text{bit } 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Nel caso quantistico oltre ai bit classici  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ , abbiamo un **quantum bit** o **qubit**, dato dalla combinazione lineare scritta in precedenza che qui riproponiamo

$$|\alpha\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle \tag{14}$$

Due *n*-unità

$$U_1^{(1)}, U_2^{(2)}$$

possono essere combinate in modo da formare una nuova unità, seguendo le regole di composizione del momento angolare. Precisamente, se (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} | \alpha \rangle &= c_+ |+\rangle_1 + c_- |-\rangle_1 \\ U_2^{(1)} | \beta \rangle &= \gamma_+ |+\rangle_2 + \gamma_- |-\rangle_2, \end{aligned}$$

possiamo avere una 0-unità risultante:

$$|s = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2),$$

dove un prodotto del tipo  $|+\rangle_1 |-\rangle_2$  è una conseguenza del prodotto tensoriale dei rispettivi spazi di Hilbert. Le due 1-unità si diranno *entangled*, giacché i corrispondenti sistemi fisici realizzano un entanglement quantistico. Nel caso in esame, se la prima 1-unità è nel bit  $|+\rangle$ , la seconda 1-unità è nel bit classico  $|-\rangle$ , e viceversa (da qui l'entanglement ovvero l'*intreccio* tra le due unità). Questo ragionamento può essere eseguito in ordine inverso: una qualunque 0-unità è costituita da due sotto-(1 unità). Utilizzo il simbolismo della teoria degli insiemi:

$$U^{(0)} = U_1^{(1)} \cup U_2^{(1)} \tag{15}$$

Penrose assume come **configurazione iniziale di rete**, l'insieme

$$\Sigma_0 = \{U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \dots, U_N^{(0)}\}$$

Si noti che la scelta  $n = 0$  (quindi  $s = 0$ ) non è casuale, giacché fisicamente  $s = 0$  significa assenza di una direzione privilegiata. Ok, non abbiamo uno spazio fisico; tuttavia dobbiamo in qualche modo tirarlo fuori dal grafo :) , per cui la scelta  $s = 0$  appare più che ovvia. Ciascuna delle  $N$  0-unità è a sua volta, composta da una coppia di 1-unità entangled, per cui la rete si è espansa passando dalla configurazione iniziale  $\Sigma_0$  a una nuova configurazione  $\Sigma_1$  in cui ci sono oltre alle  $N$  0-unità,  $2N$  1-unità. A loro volta, queste possono combinarsi secondo le usuali regole di composizione del momento angolare, dando luogo a numeri quantici più elevati. A questo punto appare chiaro che  $\Sigma$  tende ad espandersi, per cui ci aspettiamo grandi numeri quantici. E come è ben noto, questo significa: comportamento secondo la fisica classica. Il lettore attento avrà già compreso che nel limite dei grandi numeri quantici emerge il concetto di direzione.

## 5 Limite dei grandi $n$

Nel numero precedente, abbiamo asserito che per  $n \rightarrow +\infty$  ci aspettiamo un comportamento classico della rete di spin che darà luogo al concetto di *direzione* in un 3-spazio euclideo.

Per giustificare tale affermazione rammentiamo innanzitutto che passando al numero quantico di Penrose, il numero di valori assunti dalla componente  $S_z$  è pari a  $n + 1$ :

$$0, 1, 2, \dots, n$$

Al crescere indefinito di  $n$ , i valori assunti da  $S_z$  compongono uno spettro discreto che diviene progressivamente più “fitto”, e il limite per  $n \rightarrow +\infty$  restituisce uno spettro continuo da  $-\infty$  a  $+\infty$ :

$$S_k \in \left\{ -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, n \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S_k \in (-\infty, +\infty)$$

Ma questo è proprio ciò che succede classicamente: le componenti cartesiane del momento angolare di spin di una trottola, possono variare con continuità da  $-\infty$  a  $+\infty$ :

$$\mathbf{S} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega},$$

essendo  $\boldsymbol{\omega}$  il vettore velocità angolare ed  $\mathcal{I}$  il momento di inerzia della trottola rispetto all’asse di rotazione. A parità di momento d’inerzia, i.e. a parità di trottola, variando  $\boldsymbol{\omega}$  con continuità,  $\mathbf{S}$  varia con altrettanta continuità.

Questa argomentazione giustifica l’asserzione secondo cui il limite per  $n \rightarrow +\infty$  restituisce un comportamento classico. Questi sono risultati ben noti nel paradigma della meccanica quantistica. Probabilmente, l’intuizione iniziale di Penrose era basata proprio su questo ragionamento eseguito, però, in verso opposto: sia data una rete di spin inizializzata da

$$\Sigma_0 = \left\{ U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \dots, U_N^{(0)} \right\}$$

Allo step  $n$ -esimo, la rete diviene

$$\Sigma_n = \left\{ U_1^{(0)}, U_2^{(0)}, \dots, U_N^{(0)}, \dots, U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \dots \right\}$$

Al limite per  $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Sigma_n = \mathbf{r},$$

dove  $\mathbf{r}$  è una direzione orientata dello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{R}^3$ . Come è noto, nello spazio euclideo una direzione è una **classe di equivalenza** che determina una partizione di  $\mathbb{R}^3$ . In parole povere, il 3-spazio euclideo è l’unione di infinite classi di equivalenza, ciascuna delle quali è una direzione. Per quanto detto, una singola rete di spin dà luogo a una singola direzione. Per determinare una seconda direzione, è necessario partire da una seconda rete di spin, e così via all’infinito in modo da riprodurre l’intero 3-spazio. A nostro avviso, ciò contraddice il principio di Occam, per cui è più sensato partire da un’unica rete di spin che nel corso della sua crescita subisce un processo di frammentazione in un numero progressivamente crescente di reti distinte, ciascuna delle quali dà origine a una direzione. In tal modo viene riprodotto il 3-spazio euclideo.

Prima di concludere questo numero, facciamo un’osservazione importante. Si potrebbe obiettare che gli spin networks danno origine al 3-spazio euclideo e non allo spaziotempo della relatività ristretta che come è noto, è un 4-spazio pseudoeuclideo. Tuttavia il 3-spazio è proprio il risultato che ci si aspetta, giacché gli spin networks sono basati sulla regola di composizione del momento angolare di spin. Regola che appartiene al paradigma della meccanica quantistica non relativistica, per cui la rete non può dare luogo che a uno spazio tridimensionale euclideo.

## 6 Alcune riflessioni

Riepilogando: da uno spin network “emerge” un 3-spazio euclideo, grazie a un processo di frammentazione della rete di spin in una infinità non numerabile di spin networks. Siamo in regime newtoniano, per cui potremmo inserire un parametro  $t$  (tempo) che scorre indipendentemente dal 3-spazio. Tuttavia, è più ragionevole generalizzare le conclusioni precedenti nel paradigma quanto-relativistico. In tal modo ci si aspetta come risultato del processo di frammentazione, un 4-spazio pseudoeuclideo ovvero lo spaziotempo della relatività ristretta.

Abbiamo poi stabilito che ogni vertice del grafo che implementa gli spin networks, è un quantum bit, per cui è suggestivo paragonare tale ente a un calcolatore quantistico. Quindi una buona domanda è: «È possibile sottoporre tale sistema al **test di Turing?**» La risposta è un sonoro NO, in quanto il pensiero è un processo che avviene nel tempo, mentre le reti di spin sono intrinsecamente aspatiali e atemporal. In altri termini, il pensiero necessita delle usuali coordinate spaziotemporali. In più, l’“atto di pensare” determina una freccia del tempo psicologica equiversa alla freccia del tempo termodinamica. Una conclusione bizzarra potrebbe quindi essere contenuta nella ovvia risposta: «Una rete di spin non “pensa”, altrimenti sarebbe sottoposta al secondo principio della termodinamica».

Un'altra domanda, forse più impegnativa è: «Quali sono le conseguenze a livello di paradigma MWI (configurazione a più mondi)?». Possibile risposta: l'unico effetto può realizzarsi forzando il collasso della funzione d'onda dei quantum bit che compongono la rete. In tal modo, il bit cancellato viene in realtà salvato in una copia della rete di spin. In altri termini, il collasso di un quantum bit è un processo di clonazione della rete medesima. La rete-clone determinerà a sua volta un 4-spazio pseudoeuclideo che implementa un nuovo universo. Dal momento che esiste un'infinità non numerabile di quantum bit, avremo un'infinità altrettanto non numerabile di universi paralleli convoluti in unico multiverso. Il problema che si apre è: «Come si può forzare il collasso della funzione d'onda?» Tentativo di risposta: in meccanica quantistica il collasso della funzione d'onda avviene attraverso un'operazione di misura da parte di un osservatore cosciente. Nel caso di uno spin network, è ovvio che nessuno osserva tale sistema. Siamo quindi costretti ad asserire che tale sistema si auto-osserva, facendo così collassare la funzione d'onda dei singoli quantum bit.

Ne concludiamo che un tale sistema ha tutte le caratteristiche di un oggetto God like.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Penrose R. 1969. *Angular momentum: An approach to Combinatorial Spacetime*, in: *Quantum Theory and Beyond*, T. Bastin (ed.), Cambridge Univ. Press, 1969.