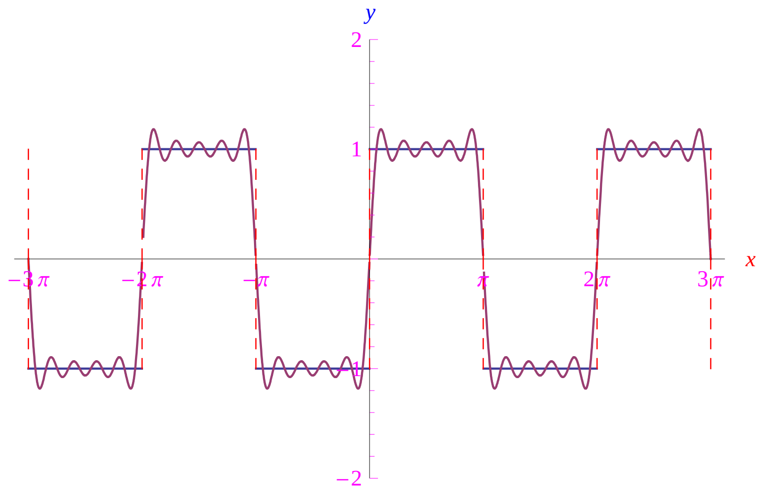
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

La serie di Fourier in *Mathematica*

Marcello Colozzo



Indice

1 Le istruzioni Which e Piecewise

Definizione 1 *Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice* **periodica di periodo** T*, se sono verificate le seguenti condizioni [1]:*

- $x \in X \Longrightarrow (x + kT) \in X, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = f(x + T), \quad \forall x \in X$

La seconda condizione implica

$$f(x) = f(x + kT), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Il grafico di una funzione periodica è costituito da infiniti rami, ciascuno dei quali si ottiene dal grafico della restrizione di f a $X \cap [0, T]$, eseguendo una traslazione nella direzione dell'asse x di ampiezza kT. Ad esempio, per la funzione

$$f(x) = e^x \text{ in } [0, 2\pi], \text{ periodica di periodo } T = 2\pi, \tag{2}$$

otteniamo il grafico di fig. 1.

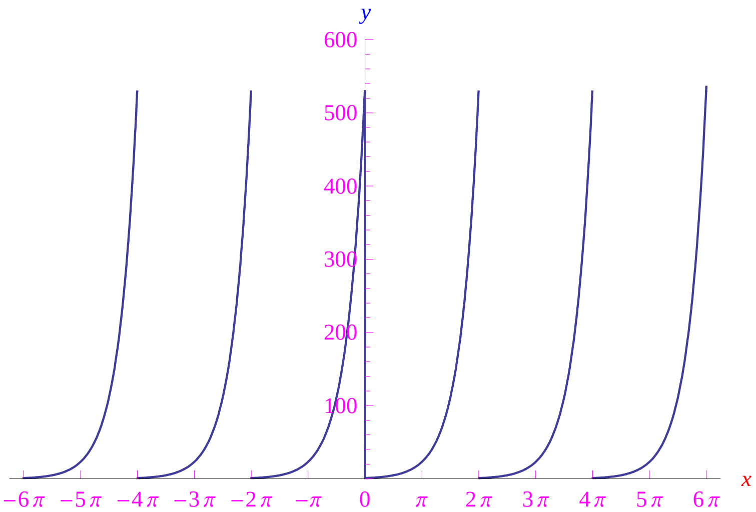


Figura 1: Grafico della funzione periodica (2).

Tale proprietà suggerisce di utilizzare l'istruzione `Which` o l'istruzione `Piecewise` per dichiare una funzione periodica in *Mathematica.*

2 L'istruzione Round

Definizione 2 *Dicesi* **funzione round** *la funzione reale $R(x)$ che per ogni numero reale x, restituisce l'intero più prossimo a x.*

In *Mathematica* la funzione $R(x)$ è built-in ed è invocata dal comando `Round[]`. In fig. 2 riportiamo il grafico di tale funzione.

$R(x)$ non è definita nei punti

$$x_k = k + \frac{1}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

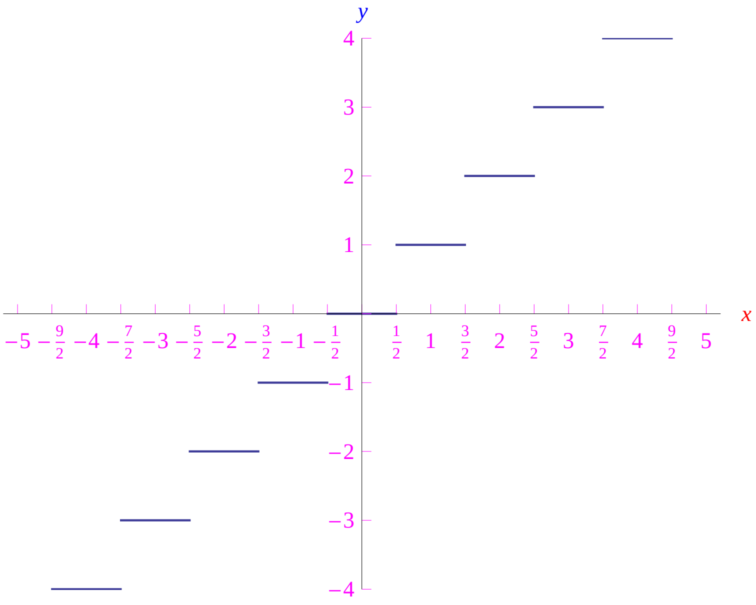


Figura 2: Andamento della funzione $R(x)$ nell'intervallo $[-5, 5]$.

Denotando con $[\cdot]$ la parte intera, risulta:

$$\lim_{x \to x_k^-} R(x) = [x_k], \quad \lim_{x \to x_k^+} R(x) = 1 + [x_k],$$

onde ogni punto x_k è di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è

$$s(x_k) = \lim_{x \to x_k^+} R(x) - \lim_{x \to x_k^-} R(x) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Ciò premesso, definiamo la funzione

$$\psi_T(x) \stackrel{def}{=} x - T \cdot R\left(\frac{x}{T}\right), \tag{4}$$

essendo T un parametro reale positivo. Tale funzione è periodica di periodo T, come evidenziato dal grafico di fig. 3.

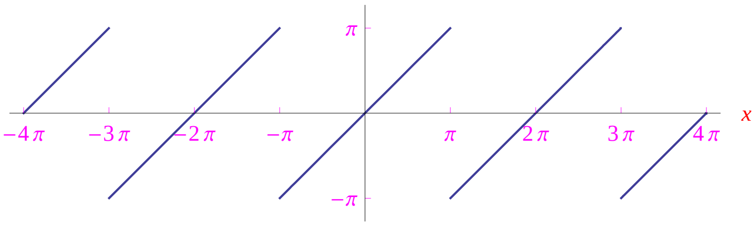


Figura 3: Andamento della funzione $\psi_T(x)$.

La funzione $\psi_T(x)$ *resetta* il valore della variabile indipendente, nel senso che riproduce la funzione identica in ogni intervallo di periodicità

$$X_k = \left[-\frac{T}{2} + kT, \frac{T}{2} + kT\right], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Tale proprietà permette di incorporare in una forma compatta una qualunque funzione periodica. Ad esempio, supponiamo di avere la seguente funzione periodica di periodo 2π:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad T = 2\pi, \tag{5}$$

onde l'espressione elementare $f(x) = x^2$ è valida solo nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Si tratta, quindi, di un'espressione *locale*. Diversamente, l'espressione *globale* della predetta funzione periodica, può scriversi:

$$f(x) = \left[x - 2\pi R\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right]^2, \quad \forall x \in (-\infty, +\infty),$$

il cui grafico è riportato in fig. 4.

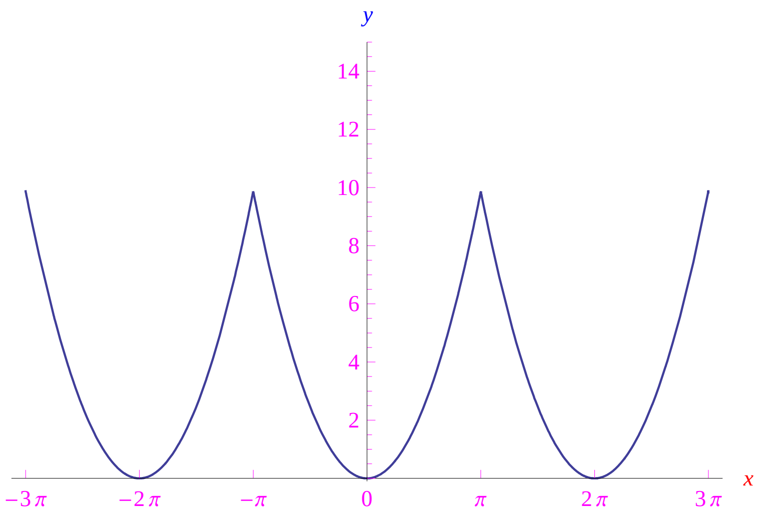


Figura 4: Grafico della funzione periodica (5).

Osservazione 3 *Il codice Mathematica può essere scaricato in formato pdf dal seguente http://www.extrabyte.info/plot_periodiche.pdf.*

3 La serie di Fourier

3.1 Calcolo simbolico

Ricordiamo che per un'assegnata funzione $f(x)$ periodica di periodo T, la serie di Fourier è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right)\right], \tag{6}$$

dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx, \quad k = 1, 2, ...$$

In particolare, se sono verificate le condizioni di Dirichlet la predetta serie converge e ha per somma la funzione $f(x)$ (escludendo i punti di discontinuità di prima specie). Nelle applicazioni è frequente il caso in cui si approssima la funzione a una opportuna somma parziale:

$$f(x) \simeq S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right], \tag{8}$$

che è possibile calcolare direttamente con *Mathematica*, dopo aver caricato il package `FourierSeries`, per poi invocare l'istruzione `FourierTrigSeries[]` che nelle impostazioni di default restituisce la somma parziale (8) per $T = 1$. In altri termini, se nell'editor di *Mathematica* scriviamo (per un'assegnata funzione f):

```
Fourier[
(*funzione*)
f[x],
(*variabile indipendente*)
x,
(*ordine della somma parziale*)
n
]
```

il kernel di Mathematica calcola i coefficienti di Fourier (7) per $T = 1$. Nel caso contrario, cioè per una funzione di periodo $T \neq 1$, dobbiamo utilizzare l'opzione

```
FourierParameters->{a,b}
```

dove a,b non vanno confusi con i coefficienti di Fourier. Più precisamente, nelle impostazioni di default è

```
a=0
b=1
```

Il parametro `b` è legato al periodo da `T=1/|b|`, cioè |`b`| è la frequenza (reciproco del periodo). Ne consegue che se abbiamo una funzione periodica di periodo $T \neq 1$, dobbiamo impostare i parametri nel seguente modo:

```
FourierParameters->{0,1/T}
```

Consideriamo l'esempio classico di un'onda quadra, cioè

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in [-\pi, \pi] \text{ di periodo } T = 2\pi \tag{9}$$

Utilizzando la funzione round (§ 2):

$$f(x) = \frac{x - 2\pi R\left(\frac{x}{2\pi}\right)}{\left|x - 2\pi R\left(\frac{x}{2\pi}\right)\right|}, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{10}$$

il cui andamento è riportato in fig. 5.

Invochiamo quindi l'istruzione `FourierTrigSeries` con il parametro `b` settato su $1/(2\pi)$, fissando l'ordine a $n = 10$. L'output è

$$S_{10}(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x\right) \tag{11}$$

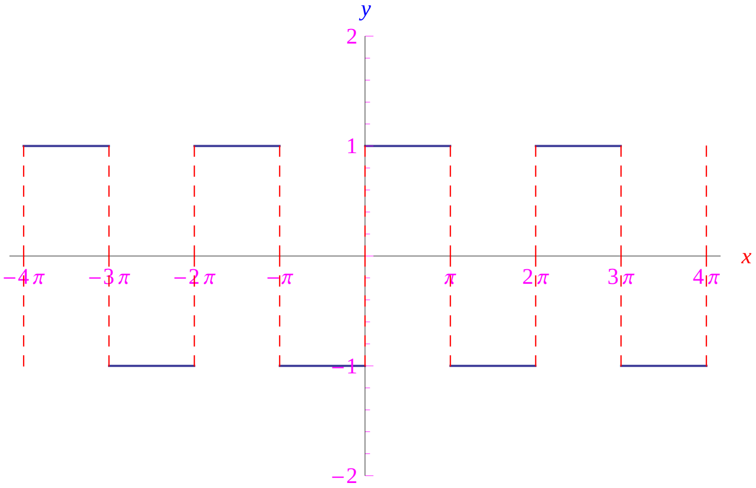


Figura 5: Grafico della funzione periodica (10).

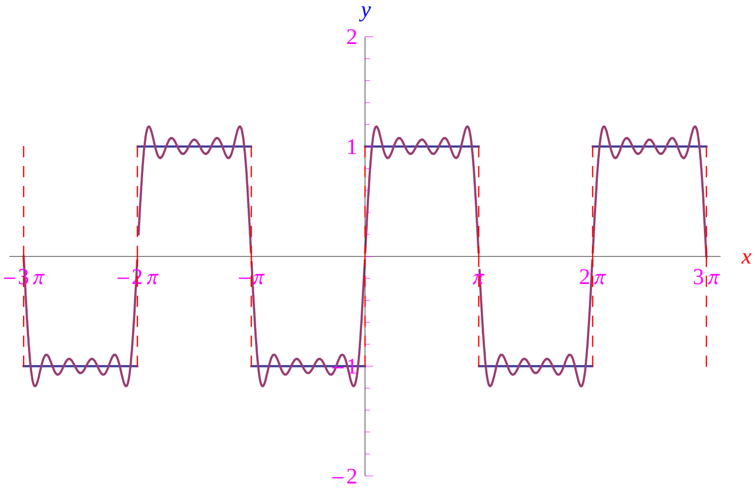


Figura 6: Grafico della funzione periodica (10) confrontato con il grafico della somma parziale di ordine 3 della sua serie di Fourier.

Notiamo innanzitutto uno sviluppo di soli seni, dato che la funzione è dispari. Confrontando con il grafico della funzione, otteniamo il diagramma di fig. 6.

Consideriamo ora la funzione periodica di periodo 2π, così definita

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi.\pi], \tag{12}$$

già vista nella sezione precedente, e il cui grafico è riportato in fig. 4. Calcoliamo, quindi, la somma parziale del terz'ordine:

$$S_3(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x + \cos 2x - \frac{4}{9}\cos 3x \tag{13}$$

Il confronto con il grafico della funzione è illustrato in fig. 7.

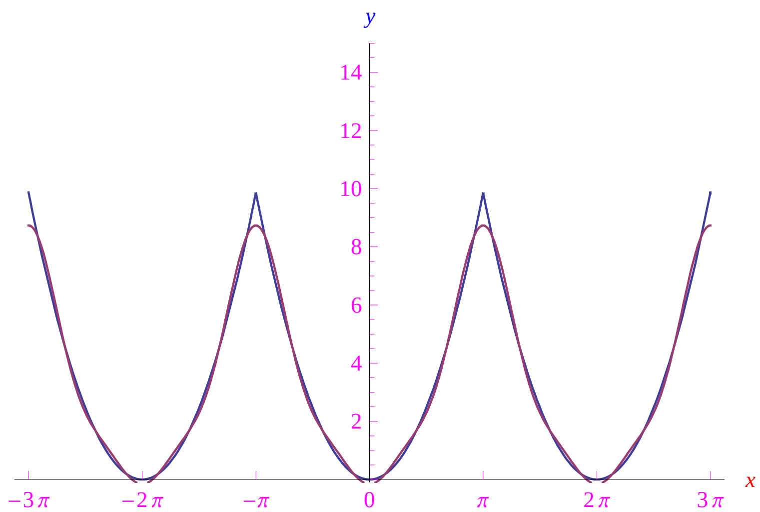


Figura 7: Grafico della funzione periodica (12) confrontato con il grafico della somma parziale di ordine 3 della sua serie di Fourier.

Le istruzioni `FourierCosCoefficient` e `FourierSinCoefficient` restituiscono i coefficienti di Fourier (7) per un assegnato n, che può essere lasciato inespresso. Riprendendo la funzione (9), abbiamo

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$
$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right], \quad n = 1, 2, ...$$

e quindi la somma parziale di ordine n:

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left[1 - (-1)^k\right]}{k} \sin kx$$

o volendo, la serie di Fourier della funzione assegnata:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[1 - (-1)^k\right]}{k} \sin kx \tag{14}$$

Si osservi che i coefficienti sono nulli per k pari, come appunto ci si aspetta. Nel caso della funzione (12) troviamo

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = 0$$

La formula per a_n è inapplicabile per $n = 0$, per cui chiediamo a *Mathematica* di calcolare il coefficiente settando n su zero. Il risultato è

$$a_0 = \frac{1}{12}$$

Ne consegue la somma parziale di ordine n:

$$S_n(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \tag{15}$$

e quindi la serie di Fourier

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx \tag{16}$$

3.2 Calcolo numerico

Per quanto precede, il carico computazionale della serie di Fourier è localizzato sul calcolo degli integrali (7) che per funzioni troppo complicate, è improponibile. Si ricorre, allora, ad approssimazioni numeriche.

Ad esempio

$$f(x) = \sin(\cos x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad T = \pi, \tag{17}$$

per cui

$$f(x) = \sin\left[\cos\left(x - \pi R\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)\right], \tag{18}$$

il cui grafico è riportato in fig. 8.

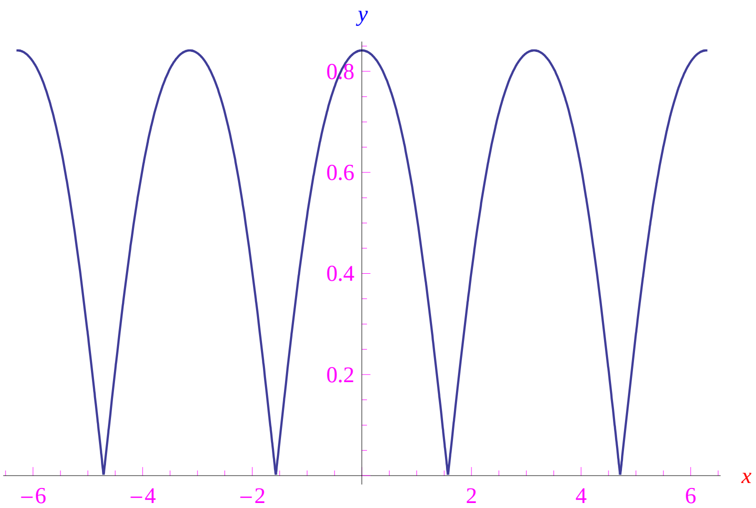


Figura 8: Grafico della funzione periodica (17).

In questo caso si utilizza l'istruzione `NFourierTrigSeries` la cui sintassi è la medesima dello stesso comando in modalità simbolica. Calcolando la somma parziale di ordine 10, otteniamo il grafico di fig. 9.

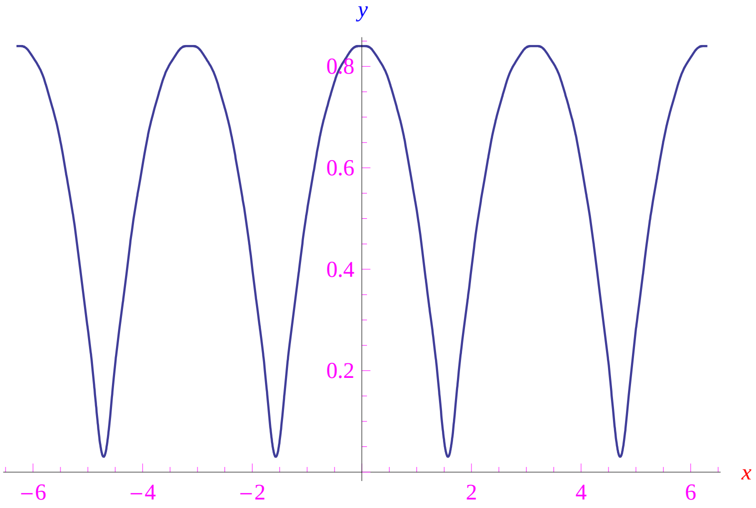


Figura 9: Grafico della funzione periodica (17) confrontato con il grafico della somma parziale di ordine 10 della sua serie di Fourier.

Il codice Mathematica degli esempi appena visti, può essere scaricato in formato pdf dal seguente link:

http://www.extrabyte.info/fourierTrigSeries.pdf.

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.

[2] Murray R. Spiegel 1978. *Analisi di Fourier*. Schaum