Interpretazione cinematica dei punti cuspidali

Marcello Colozzo
[http://www.extrabyte.info]

Consideriamo una particella di massa m che compie un moto piano lungo una traiettoria γ_+ di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t,\ \ y(t) = y_0 + \eta_0 \sqrt{|t - t_0|},\quad t \in [0, +\infty), \tag{1}$$

essendo t il tempo, mentre $v_0 > 0$ e $\eta_0 > 0$ sono due costanti con le appropriate dimensioni[1]. Il numero reale $t_0 > 0$ è, invece, un istante assegnato da non confondere con l'istante iniziale che è $t = 0$. La traiettoria γ_+ non è una curva regolare poiché $\dot{y}(t)$ ha una discontinuità di seconda specie in t_0. Infatti:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + \eta_0\sqrt{t - t_0}, & \text{se } t \geq t_0 \\ y_0 + \eta_0\sqrt{t_0 - t}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \tag{2}$$

onde:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \tag{3}$$

La derivata prima è definita in $[0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$, ed eseguendo il limite per $t \to t_0$:

$$\lim_{t \to t_0^-} \dot{y}(t) = -\infty,\quad \lim_{t \to t_0^+} \dot{y}(t) = +\infty, \tag{4}$$

da cui la natura cuspidale del punto $(t_0, y_0) \in \Gamma_y : y = y(t)$. Studiamo ora la funzione $y(t)$.

Insieme di definizione

La funzione (2) è definita in $\mathbb{R}$, ma dal momento che il tempo t è non negativo, consideriamo la restrizione a $[0, +\infty)$ in accordo con la (1).

Studio del segno

Risulta $y(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, +\infty)$, per cui Γ_y è contenuto nel primo quadrante.

Intersezione con gli assi

$$y(t) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{|t - t_0|} = -\frac{y_0}{\eta_0} \qquad \text{mai!} \tag{5}$$

giacchè è $y_0, \eta_0 > 0$. Ne consegue che Γ_y non interseca l'asse delle ascisse.

$$y(0) = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0} \stackrel{def}{=} y_1 > y_0 \tag{6}$$

Cioè Γ_y interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, y_1)$.

Studio della derivata prima

Dalle (3) vediamo che

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) > 0 \Longleftrightarrow t > t_0 \\ 0 \leq t < t_0 \Longrightarrow \dot{y}(t) < 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Cioè la funzione $y(t)$ è strettamente crescente in $(t_0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(0, t_0)$.

Derivata seconda

$$\ddot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}, & \text{se } t > t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \tag{8}$$

[1] In particolare, v_0 è la componente della velocità $\mathbf{v}$ della particella nella direzione dell'asse x.

Riesce

$$\ddot{y}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}} < 0, \quad \forall t \in [0, t_0) \cup (t_0, +\infty)$$

Ne consegue che $\Gamma_y : y = y(t)$ volge la concavità verso il basso.

Comportamento all'infinito. Asintoti obliqui

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$$

Inoltre:

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{y}(t) = 0,$$

per cui il grafico Γ_y è privo di asintoti obliqui.

Dalle (7) emerge che il punto cuspidale (t_0, y_0) è punto di minimo assoluto per la funzione $y(t)$. A questo punto siamo in grado di tracciare il grafico Γ_y, come illustrato in fig. 1.

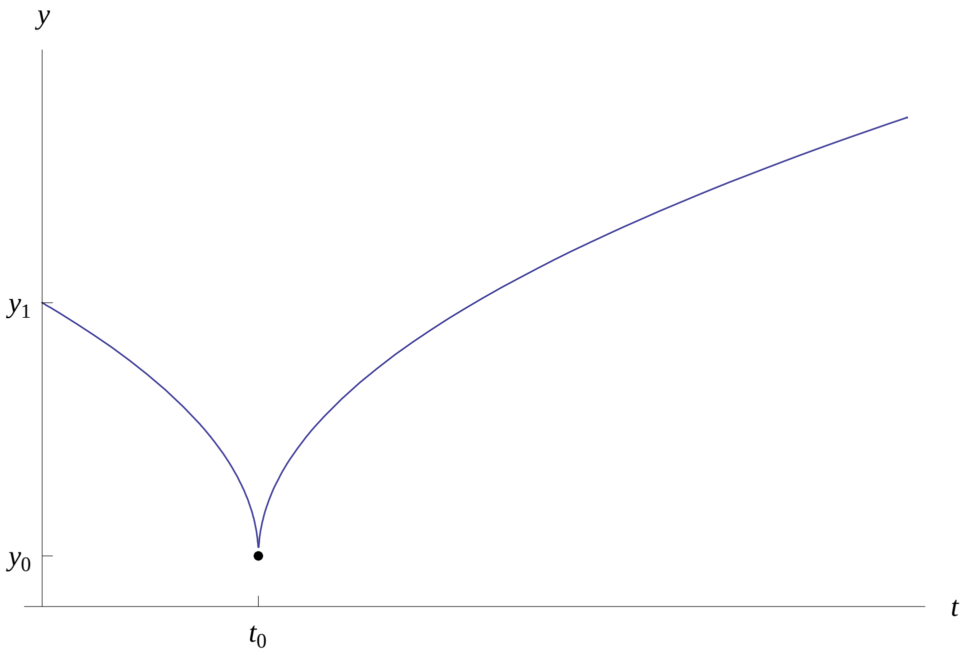

Figura 1: Grafico dell'ordinata y della particella in funzione del tempo. Il punto (t_0, y_0) è una cuspide.

Eliminando il parametro t tra le (1), otteniamo la rappresentazione ordinaria della traiettoria, cioè $\gamma_+ : y = f(x)$, dove:

$$f(x) = y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{|x - x_0|}, \quad \forall x \in [0, +\infty) \tag{9}$$

essendo $x_0 \stackrel{def}{=} x(t_0)$. Svincoliamoci dal valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x - x_0}, & \text{se } x \geq x_0 \\ y_0 + \eta_0 v_0^{-1/2} \sqrt{x_0 - x}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \tag{10}$$

la cui derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x - x_0}}, & \text{se } x > x_0 \\ -\frac{\eta_0 v_0^{-1/2}}{2\sqrt{x_0 - x}}, & \text{se } 0 \leq x < x_0 \end{cases}, \tag{11}$$

avendosi:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$$

Ne consegue che $P_0(x_0, y_0)$ è un punto cuspidale per γ_+. Inoltre:

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0, +\infty)$$
$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in [0, x_0)$$

Ciò implica la stretta crescenza di $f(x)$ in $(x_0, +\infty)$, mentre la funzione è strettamente decrescente in $(0, x_0)$. È facile persuardersi che $f''(x) < 0, \ \forall x \in (0, +\infty) - \{x_0\}$. Il comportamento agli estremi del campo di esistenza è:

$$f(0) = y_0 + \eta_0 v_0^{1/2}\sqrt{x_0} = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0},$$

cioè $f(0) = y_1$, dove y_1 è dato dalla (6). Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

per cui la funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$, mentre il grafico è privo di asintoti obliqui, giacchè $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

L'analisi eseguita ci consente di tracciare la traiettoria della particella (cfr. fig. 2).

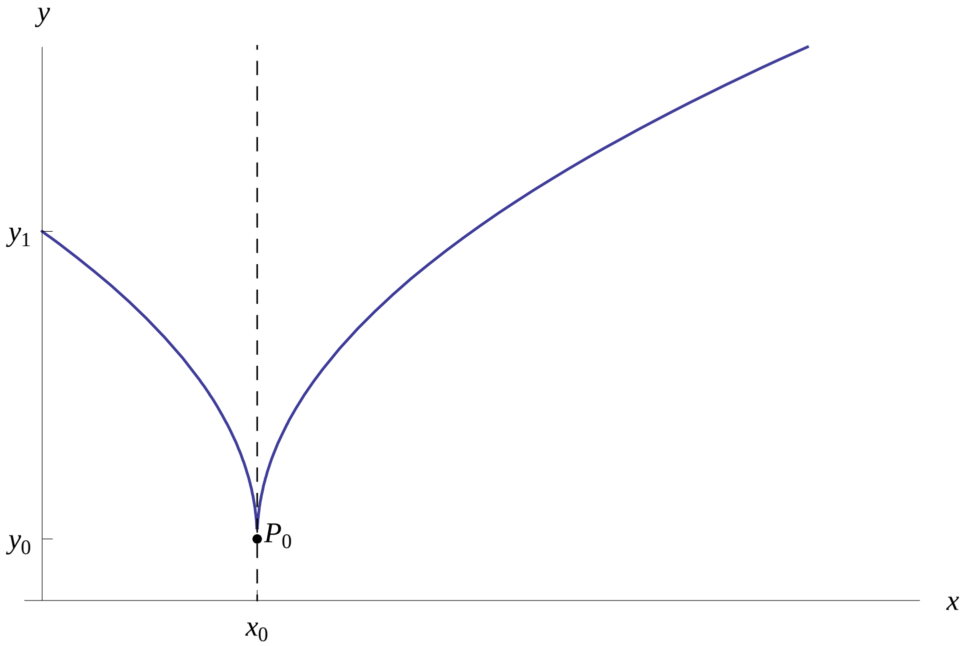

Figura 2: Traiettoria della particella.

Il vettore velocità della particella è:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} \tag{12}$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati. Abbiamo

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0\mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}\mathbf{j}, & \text{se } \ 0 \le t < t_0 \\ v_0\mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}\mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases} \tag{13}$$

Si osservi che il moto componente secondo la direzione dell'asse x è uniforme, poichè avviene a velocità costante il cui modulo è $v_0 > 0$. Si tratta, in particolare, di un moto progressivo in quanto la particella si sposta nella direzione positiva dell'asse x. Per contro, il moto componente lungo l'asse y è decelerato, giacchè $\dot{y}(t) < 0$. Tale moto è regressivo per $t < t_0$, per poi divenire progressivo a ogni $t > t_0$. Inoltre, la funzione vettoriale (13) della variabile reale t, ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t\to t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0\mathbf{i} + (-\infty)\,\mathbf{j}, \quad \lim_{t\to t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0\mathbf{i} + (+\infty)\,\mathbf{j}$$

Infatti, per quanto precede, la componente secondo l'asse y, della funzione $\mathbf{v}(t)$ diverge negativamente per $t \longrightarrow t_0^-$, positivamente per $t \longrightarrow t_0^+$. Ciò implica che quando la particella transita per $P_0(x_0, y_0)$, la componente v_y della velocità passa istantaneamente da $-\infty$ a $+\infty$, ed è chiaro che l'accelerazione è altrettanto infinita[2]. Più precisamente:

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathbf{j} \tag{14}$$

Tenendo conto delle (8):

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t_0-t)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ -\frac{\eta_0}{4\sqrt{(t-t_0)^3}}\mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \tag{15}$$

o ciò che è lo stesso

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}\mathbf{j} \tag{16}$$

In fig. 3 sono riportati i grafici delle funzioni $\dot{y}(t)$ e $\ddot{y}(t)$.

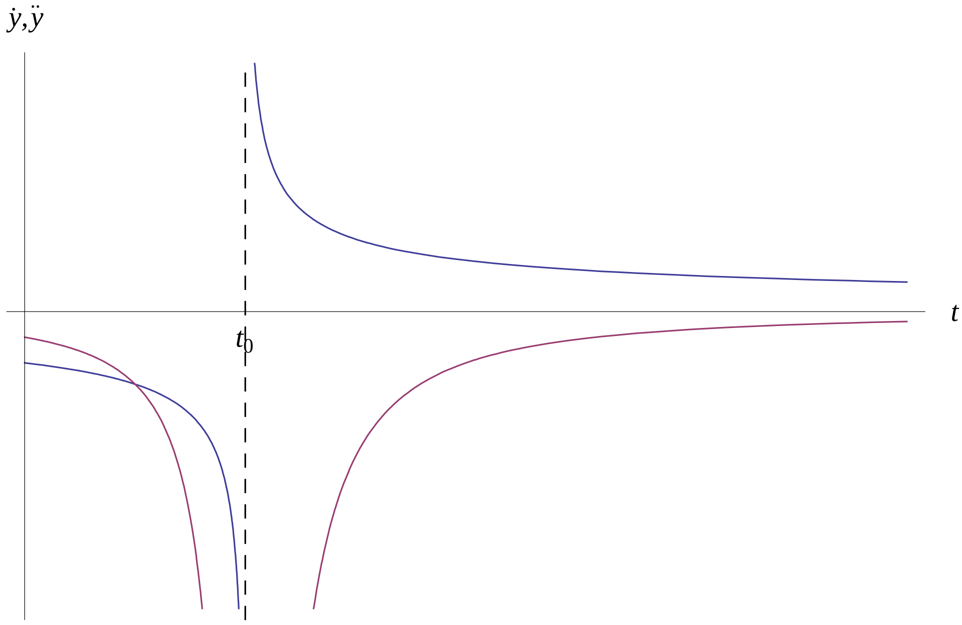

Figura 3: La curva blu è l'andamento della componente $v_y = \dot{y}$ della velocità in funzione del tempo, mentre l'altra curva è il grafico della componente $a_y = \ddot{y}$ dell'accelerazione.

Se m è la massa della particella, la forza agente su di essa è:

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

Cioè

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}\mathbf{j} \tag{17}$$

Dalla $y(t) = y_0 + \eta_0\sqrt{|t-t_0|}$ ricaviamo

$$\sqrt{|t-t_0|} = \frac{y-y_0}{\eta_0}, \quad \forall y \in [y_0, +\infty),$$

[2]Per $t \rightarrow t_0$, la variazione istantanea della componente $v_y(t) = \dot{y}(t)$ della velocità da $-\infty$ a $+\infty$, sembrerebbe produrre un'accelerazione divergente a $+\infty$. In realtà, l'accelerazione diverge negativamente poichè $v_y(t)$ risulta essere strettamente decrescente in ogni intorno di t_0 (cfr. grafico della fig. 3).

per sostituirla nella (17):

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4(y-y_0)^3}\mathbf{j}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \tag{18}$$

Cioè la forza agente sulla particella è posizionale, e come tale deriva da un potenziale U e quindi da un'energia potenziale $V = -U$ tale che

$$\mathbf{F}(y) = \nabla U = -\nabla V,$$

osservando che $\mathbf{F}$ dipende dalla sola variabile y:

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{dV(y)}{dy}\mathbf{j},$$

per cui

$$\begin{aligned} V(y) &= \frac{m\eta_0^4}{4}\int \frac{dy}{(y-y_0)^3} \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2} + V_0, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \end{aligned}$$

Un qualunque campo si annulla all'infinito, onde:

$$\lim_{y\to+\infty} V(y) = 0 \Longrightarrow V_0 = 0$$

Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y-y_0)^2}, \quad \forall y \in (y_0, +\infty) \tag{19}$$

Riepilogando: man mano che la particella si avvicina alla singolarità $P_0(x_0, y_0)$, il campo diviene progressivamente più intenso e tale sarà il modulo della forza che ne deriva. Quest'ultima incurverà la traiettoria fino a quando ($t \to t_0 \Longrightarrow |\mathbf{F}(t)| \to +\infty$) questa risulterà essere tangente alla retta verticale $x = x_0$. Qui il vettore velocità avrà modulo infinito con orientamento verso il basso, per invertire istantaneamente il verso, conservando la direzione. Per tale ragione, il punto cuspidale $P_0(x_0, y_0)$ è anche denominato *punto di regresso* (*rebroussment* [1]). Si badi che tale configurazione cinematica contraddice uno dei postulati della Relatività Speciale, secondo cui l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{V}$ dei valori assunti dalla velocità di particelle massive è pari a c i.e. velocità della luce nel vuoto ($< +\infty$):

$$c = \sup \mathcal{V} < +\infty$$

***

Consideriamo ora la traiettoria γ_- di rappresentazione parametrica:

$$x(t) = v_0 t, \; y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{|t-t_0|}, \quad t \in [0, +\infty) \tag{20}$$

Studiando la funzione $y(t) = y_0 - \eta_0\sqrt{|t-t_0|}$ si perviene al grafico riportato in fig. 4.

Riportiamo di seguito le derivate – prima e seconda – della $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t-t_0}}, & \text{se } t > t_0 \\ \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0-t}}, & \text{se } 0 \leq t < t_0 \end{cases} \tag{21}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t-t_0|^3}}$$

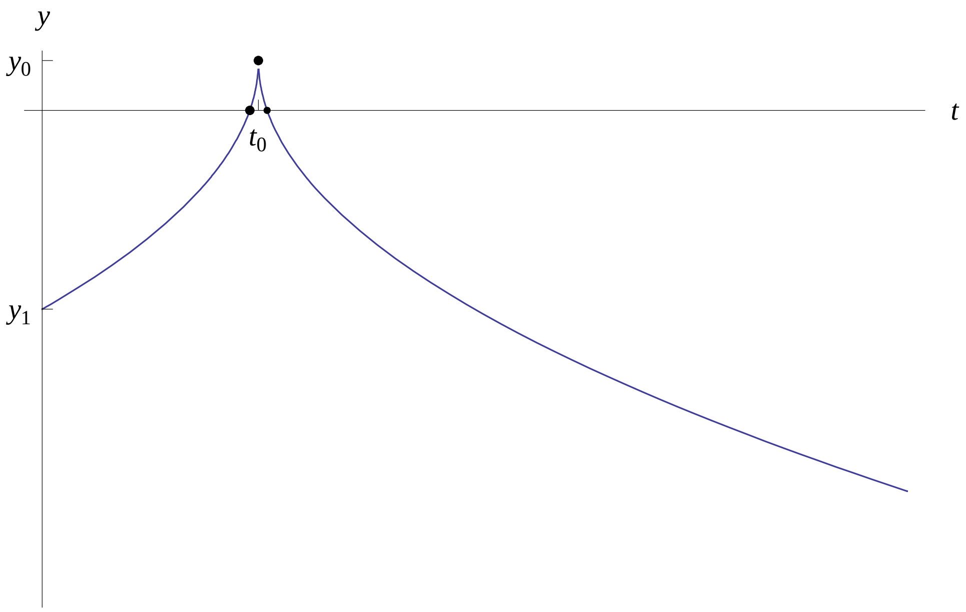

Figura 4: Andamento dell'ordinata $y = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$ in funzione del tempo t. In questo caso, il diagramma orario interseca l'asse delle ascisse nei punti $t_{1,2} = t_0 \mp \left(\frac{y_0}{\eta_0}\right)^2$. Il diagramma interseca l'asse delle ordinate nel punto di ordinata $y_1 = y_0 - \eta_0 \sqrt{t_0}$.

Quindi il vettore velocità:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} v_0 \mathbf{i} + \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0 - t}} \mathbf{j}, & \text{se } \ 0 \leq t < t_0 \\ v_0 \mathbf{i} - \frac{\eta_0}{2\sqrt{t - t_0}} \mathbf{j}, & \text{se } t > t_0 \end{cases}, \tag{22}$$

e il vettore accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|^3}} \mathbf{j} \tag{23}$$

E la forza:

$$\mathbf{F}(t) = \frac{m\eta_0}{4\sqrt{|t - t_0|^3}} \mathbf{j} \tag{24}$$

In questo caso la velocità ha il seguente comportamento:

$$\lim_{t \to t_0^-} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (+\infty) \mathbf{j}, \quad \lim_{t \to t_0^+} \mathbf{v}(t) = v_0 \mathbf{i} + (-\infty) \mathbf{j}$$

da cui vediamo che transitando per la cuspide, la componente v_y del vettore velocità passa istantaneamente da $+\infty$ a $-\infty$. Svincoliamoci dalla variabile t ricavando dalla $y(t) = y_0 - \eta_0 \sqrt{|t - t_0|}$

$$\sqrt{|t - t_0|} = \frac{y_0 - y}{\eta_0}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0),$$

che sostituita nella (24) porge

$$\mathbf{F}(y) = \frac{m\eta_0^4}{4(y_0 - y)^3} \mathbf{j}, \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \tag{25}$$

L'energia potenziale del campo $\mathbf{F}(y)$ è

$$\begin{aligned} V(y) &= -\frac{m\eta_0^4}{4} \int (y_0 - y)^{-3} dy \\ &= -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2} + V_0', \quad \forall y \in (-\infty, y_0) \end{aligned}$$

Al solito, il campo si annulla all'infinito:

$$\lim_{y \to -\infty} V(y) = 0,$$

onde $V_0' = 0$. Quindi:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y_0 - y)^2}, \quad \forall y \in (-\infty, 0) \tag{26}$$

Le (19)-(26) si riuniscono in un'unica equazione:

$$V(y) = -\frac{m\eta_0^4}{8(y - y_0)^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{y_0\}, \tag{27}$$

che è una buca di potenziale infinitamente profonda come riportato in fig. 5.

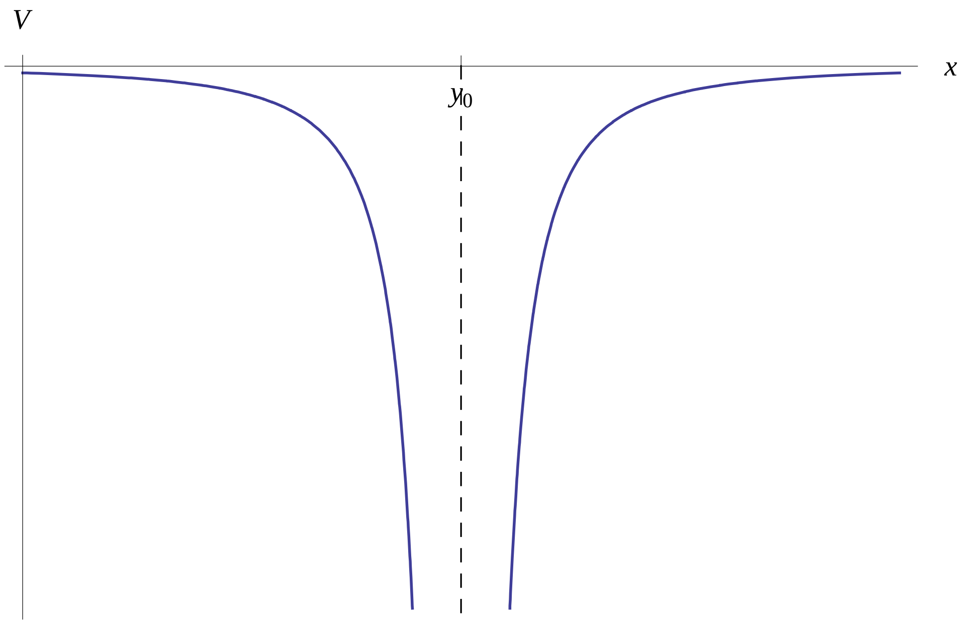

Figura 5: Buca di potenziale infinitamente profonda.

Per quanto riguarda l'espressione analitica della forza agente sulla particella, le (18)-(25) si riuniscono nell'unica espressione:

$$\mathbf{F}(y) = -\frac{m\eta_0^4}{4|y - y_0|^3}\mathbf{j}$$

Ne consegue che le traiettorie $\gamma_\pm$ sono le curve integrali del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\frac{\eta_0^4}{4|y-y_0|^3} \end{cases} \tag{28}$$

Le condizioni iniziali:

$$x(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = v_0$$
$$y(0) = y_1 > 0, \;\; \dot{y}(0) = -\frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}}$$

danno luogo alla traiettoria γ_+. L'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0, t_0 > 0$, giacchè $y_1 = y_0 + \eta_0\sqrt{t_0}$. Le condizioni iniziali:

$$x(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = v_0$$
$$y(0) = y_1 < 0, \;\; \dot{y}(0) = \frac{\eta_0}{2\sqrt{t_0}}$$

danno luogo alla traiettoria γ_-. Si noti che anche qui l'ordinata y_1 è fissata dai parametri $\eta_0 > 0$, $t_0 > 0$, avendosi $y_1 = y_0 - \eta_0\sqrt{t_0}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Fiorenza R.: *Lezioni di Analisi matematica*, Liguori, 1978