# Punti critici e punti di equilibrio. Piano delle fasi

**Marcello Colozzo** - http://www.extrabyte.info

Riprendiamo l'equazione differenziale del moto

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}) \tag{1}$$

rammentando che $F(t, x, \dot{x})$ è la forza (in modulo) agente sulla particella. La sostituzione $\dot{x} = y$ restituisce il sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(t, x, y) \end{cases} \tag{2}$$

**Esempio 1** *Per un campo di forze elastiche $F(x) = -ky$, il sistema (2) si scrive*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m} x \end{cases} \tag{3}$$

**Definizione 2** *Il piano $xy$ si dice* **piano delle fasi** *dell'equazione differenziale (1).*

Se $x(t)$, $y(t)$ è una soluzione del sistema (2) è una *curva integrale* di tale sistema, che in notazione vettoriale ammette la rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. D'altra parte, i secondi membri di (2) sono le componenti cartesiane del campo vettoriale

$$\mathbf{A}(t, x, y) = (X(y), Y(t, x, y)) \tag{4}$$
$$X(y) = y, \quad Y(t, x, y) = \frac{1}{m} F(t, x, y)$$

Quindi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t)) \tag{5}$$

Ne consegue che le curve integrali del sistema (2) sono curve integrali del campo vettoriale (4).

**Definizione 3** *Le curve integrali di $\mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t))$ si dicono* **curve di fase** *del sistema.*

Per un assegnato problema di Cauchy

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x} = y \\ y = \frac{1}{m} F(t, x, y) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0, \; y(t_0) = y_0 \,, \tag{6}$$

se $F(t, x, y)$ è lipschitziana rispetto alle variabili $y, x$, per il teorema di Cauchy–Lipschitz, il problema $\mathcal{P}$ ammette una ed una sola soluzione. Ne consegue che per un assegnato punto del piano delle fasi, passa una ed una sola curva di fase.

Esaminiamo il caso particolare delle forze posizionali. Qui il sistema (2) è autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(x) \end{cases} \tag{7}$$

Dal momento che una forza posizionale unidimensionale è necessariamente conservativa, il sistema conserva l'energia meccanica:

$$E(x, y) = \frac{1}{2} m y^2 + V(x) \tag{8}$$

Cioè, se $(x(t), y(t))$ è una soluzione

$$E(x(t), y(t)) = \text{costante}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che le curve di fase sono archi di curve di livello:

$$\gamma(\mathcal{E}) = \left\{(x, y) \in R^2 \mid E(x, y) = \mathcal{E}\right\} \tag{9}$$

**Esempio 4** *Riprendendo l'esempio 1, le curve di fase sono*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{10}$$

*dove*

$$a = \frac{2E}{k}, \ b = \frac{2E}{m} \tag{11}$$

*Cioè la generica curva di fase è un ellisse con semiasse maggiore $a$ e semiasse minore $b$, dati rispettivamente da (11).*

Se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini, è possibile esplicitare (localmente) l'equazione $E(x, y) - \mathcal{E} = 0$, pervenendo quindi a una rappresentazione ordinaria del tipo $y = y(x)$, tale che

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial E}{\partial x}}{\frac{\partial E}{\partial y}}$$

per cui la richiesta di regolarità di $\gamma(\mathcal{E})$ si traduce automaticamente nella richiesta dell'assenza di zeri del gradiente di $E(x, y)$:

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial x}\right)$$

Dalla (8)

$$\nabla E = (V'(x), my) \tag{12}$$

Ne segue che i punti singolari di $\gamma(\mathcal{E})$ sono gli zeri di $\nabla E$.

**Definizione 5** *Gli zeri di $\nabla E$ si dicono* **punti critici dell'energia**.

Se $(\xi_0, \eta_0)$ è un punto critico dell'energia, dalla (12) si ha:

$$V'(\xi_0) = 0, \ \ y_0 = 0$$

Cioè, i punti critici dell'energia hanno necessariamente ordinata nulla, e sono punti estremali dell'energia potenziale.

**Definizione 6** *Un* **punto di equilibrio** *del sistema (7) è un punto $(\xi_0, 0)$ tale che il predetto sistema ammette la soluzione $x(t) \equiv \xi_0, \ y(t) \equiv 0$, per la condizione iniziale $x(0) = \xi_0, \ y(0) = 0$.*

**Teorema 7** *Il punto $(\xi_0, 0)$ è di equilibrio se e solo se è un punto critico dell'energia.*

**Dimostrazione. Implicazione diretta**

Per ipotesi $x(t) \equiv \xi_0, \ y(t) \equiv 0$ è una soluzione per cui

$$0 = \frac{1}{m} F(x(t)) = \frac{1}{m} F(\xi_0) = -V'(\xi_0)$$

**Implicazione inversa**

Per ipotesi $(\xi_0, 0)$ è un punto critico:

$$\nabla E|_{(\xi_0, 0)} = (0, 0) \Longrightarrow V'(\xi_0) = 0$$

■