Punti critici dell'energia

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Riprendiamo il caso particolare

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(t, x, y) \end{cases} \tag{1}$$

che in forma vettoriale si scrive

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}(t, \mathbf{x}) \tag{2}$$

dove

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \left(y, \frac{1}{m} F(t, x, y) \right) \tag{3}$$

Definizione 1 *Le curve integrali del campo vettoriale (3) diconsi* **curve di fase** *del sistema (1).*

Con le precedenti ipotesi di regolarità delle funzioni coinvolte, possiamo applicare il teorema di Cauchy–Lipschitz (o teorema di esistenza ed unicità), per cui comunque prendiamo un punto del piano delle fasi, per tale punto passa una ed una sola curva di fase.

Un ulteriore caso particolare è il sistema *autonomo*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(x, y) \end{cases} \tag{4}$$

che descrive il moto unidimensionale di una particella soggetta a una forza dipendente dalla posizione e dalla velocità, ma non dal tempo. Sopprimendo la dipendenza dalla velocità, ritroviamo le forze posizionali quale caso speciale di sistema autonomo:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{1}{m} F(x) \end{cases} \tag{5}$$

Assumiamo $F(x)$ lipchitziana in $A \subseteq \mathbb{R}$ (quindi uniformemente continua). In tale ipotesi, una qualunque forza posizionale unidimensionale è conservativa. Ne consegue che l'energia meccanica della particella è costante. Più precisamente, l'energia meccanica è la seguente funzione reale delle variabili reali x, y

$$E(x, y) = \frac{1}{2} m y^2 + V(x),$$

definita in

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in R, \ -\infty < y < +\infty \right\}$$

essendo R l'insieme di definizione dell'energia potenziale $V(x)$. Per la conservazione dell'energia meccanica, se $x = \mathbf{x}(t)$ è una qualunque curva di fase, si ha

$$E(x(t), y(t)) = \text{costante}, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ne consegue che le curve di fase sono archi di curve di livello:

$$\gamma(\mathcal{E}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) = \mathcal{E} \right\} \tag{6}$$

Ricapitolando, per un sistema conservativo unidimensionale, è univocamente determinata la funzione "energia meccanica" $E(x,y)$, definita in un sottoinsieme del piano delle fasi. Risulta

$$\frac{\partial E}{\partial x}=V'(x)\,,\quad \frac{\partial E}{\partial y}=my$$

per cui il gradiente della predetta funzione è

$$\nabla E=\left(V'(x)\,,my\right)$$

Come è noto, il gradiente è ortogonale alle curve di livello, e i punti in cui si annulla sono punti singolari della corrispondente curva di livello. Queste ultime sono date in forma implicita:

$$E(x,y)-\mathcal{E}=0$$

e se sono verificate le ipotesi del teorema del Dini, è possibile esplicitare localmente una delle variabili. Intuitivamente:

$$E(x,y(x))-\mathcal{E}=0$$

Derivando rispetto a x

$$\frac{d}{dx}E(x,y(x))=0\Longrightarrow\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial E}{\partial y}y'(x)=0,$$

onde

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial E}{\partial x}}{\frac{\partial E}{\partial y}}$$

che ha senso solo se $\nabla E\neq(0,0)$ per cui la richiesta di regolarità di $\gamma(\mathcal{E})$ si traduce automaticamente nella richiesta dell'assenza di zeri del gradiente di $E(x,y)$.

Definizione 2 *I* **punti critici dell'energia** *sono gli zeri di* ∇E.

In generale

$$\nabla E=\left(V'(x)\,,my\right)=(0,0)\Longleftrightarrow V'(x)=0,\ y=0$$

Cioè, i punti critici dell'energia hanno necessariamente ordinata nulla, e sono punti estremali dell'energia potenziale.

Esercizio 3 *Determinare i punti critici dell'energia se*

$$E(x,y)=\frac{1}{2}y^2+e^{-x^2}\tag{7}$$

Soluzione

La funzione energia è definita in tutto $\mathbb{R}^2$ (il grafico è in fig. 1). Calcoliamo le derivate parziali

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-2xe^{-x^2},\quad\frac{\partial E}{\partial y}=2y$$

Quindi

$$\nabla E=\left(-2xe^{-x^2},2y\right)$$

Segue

$$\nabla E=(0,0)\Longleftrightarrow\begin{cases}-2xe^{-x^2}=0\\ y=0\end{cases}\Longleftrightarrow x=y=0$$

cioè l'unico punto critico è l'origine $(0,0)$. Alternativamente, basta ricordare che è comunque $y=0$, mentre l'ascissa è punto estremale di $V(x)$.

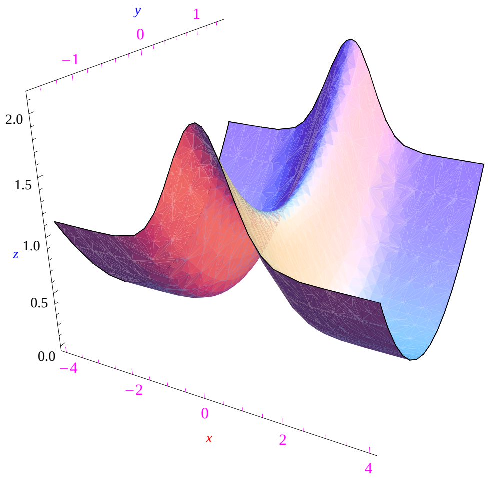

Figura 1: Andamento di $E\left(x,y\right)=\frac{1}{2}y^2+e^{-x^2}$.