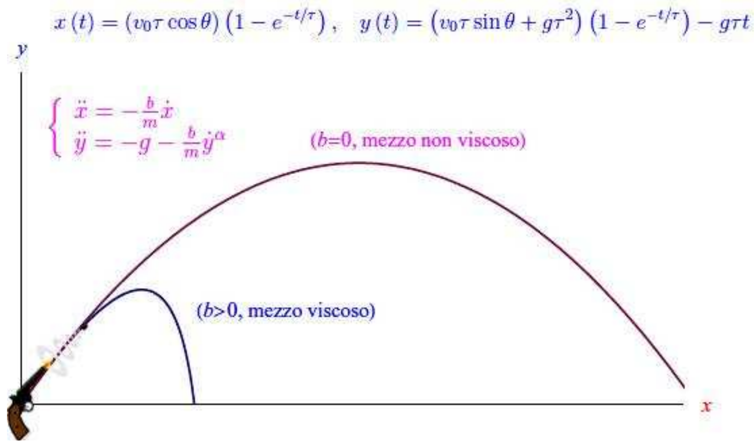
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)\quad\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\quad\int f\left(x\right)dx\quad\oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Un proiettile sparato in un mezzo viscoso colpirà il bersaglio?

Marcello Colozzo



Indice

1 Introduzione

Studiamo il moto di un proiettile (oggetto puntiforme di massa inerziale m) sparato in un mezzo viscoso in regime lineare, i.e. che oppone una resitenza dinamica:

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità del proiettile, mentre $b > 0$ una costante. Al secondo step, contempliamo il caso nonlineare, ovvero il caso di un mezzo viscoso la cui resistenza dinamica è in modulo

$$R = -bv^{\alpha}, \quad \alpha > 1$$

2 Impostazione del problema

Fissiamo un sistema di assi cartesiani disposti come in fig. 1). Il proiettile viene sparato a $t = 0$ da $x = y = 0$ con velocità iniziale

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta)\,\mathbf{i} + (v_0 \sin\theta)\,\mathbf{j} \tag{1}$$

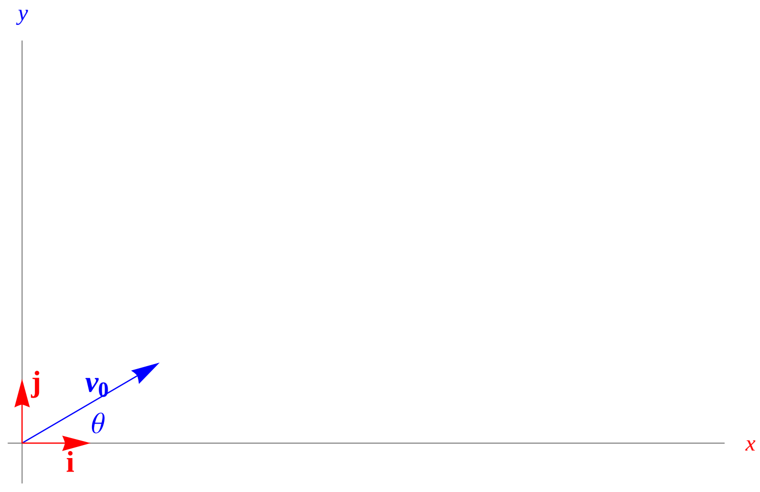


Figura 1: Sistema di riferimento inerziale per lo studio del moto di un proiettile in un mezzo viscoso.

3 Regime lineare

Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è il vettore posizione del proiettile, per il secondo principio della dinamica dovrà essere

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}, \tag{2}$$

essendo $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ l'accelerazione di gravità. Proiettando la (2) sugli assi coordinati, otteniamo il sistema di equazioni differenziali lineari del secondo ordine:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \frac{b}{m}\dot{y} \end{cases} \tag{3}$$

Le condizioni iniziali sono

$$x(0) = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = v_0 \cos\theta, \;\; \dot{y}(0) = v_0 \sin\theta \tag{4}$$

Dal momento che le equazioni differenziali in (3) sono disaccoppiate, possiamo integrarle separatamente. Iniziamo con la prima osservando che $\dot{x} = v_x$:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{b}{m} v_x$$

Separando le variabili ed integrando

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\int \frac{b}{m} dt \Longrightarrow \ln v_x = -\frac{b}{m} t + C, \;\; \forall C \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow v_x(t) = e^{-\frac{b}{m}t + C} = e^C e^{-\frac{b}{m}t}$$

Definiamo una nuova costante di integrazione $A \equiv e^C$, onde

$$v_x(t) = A e^{-\frac{b}{m}t}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali (4), si ha

$$v_x(t) = (v_0 \cos\theta)\, e^{-t/\tau}, \tag{5}$$

avendo introdotto la *costante di tempo*

$$\tau = \frac{m}{b} \tag{6}$$

A differenza del caso ideale ($b \to 0^+ \Longrightarrow \tau \to +\infty \Longrightarrow e^{-t/\tau} \to 1$)

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

in cui tale componente è costante, nel caso non ideale ($b > 0$) la predetta componente decresce esponenzialmente con una costante di tempo τ (fig. 2). Per cui

$$t \gg \tau \Longrightarrow v_x(t) \sim 0 \tag{7}$$

Conseguenza 1 *A tempi $t \gg \tau$ il proiettile cade lungo la verticale.*

Riscriviamo la (5) in forma differenziale i.e. equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{dx}{dt} = (v_0 \cos\theta)\, e^{-t/\tau},$$

il cui integrale generale è

$$x(t, C) = x(t) = -(v_0 \cos\theta)\, \tau e^{-t/\tau} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Tenendo conto delle condizioni iniziali, ottenimo l'integrale particolare

$$x(t) = (v_0 \tau \cos\theta)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{8}$$

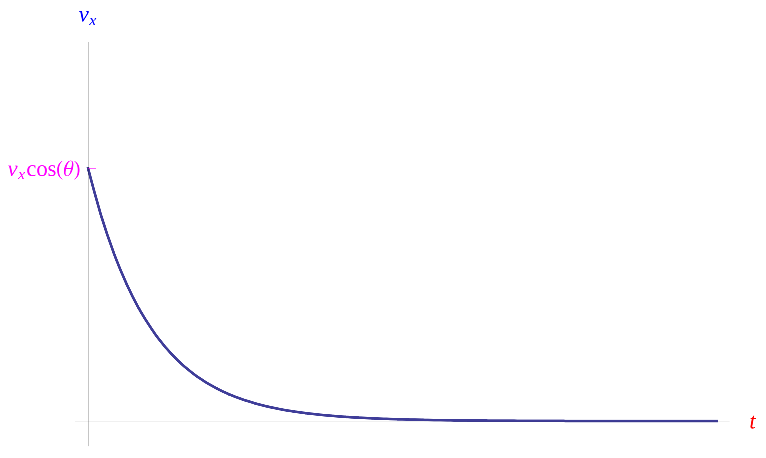


Figura 2: Andamento in funzione del tempo della componente v_x della velocità del proiettile.

Segue

$$t \gg \tau \Longrightarrow x(\tau) \sim v_0 \tau \cos\theta,$$

che un risultato ragionevole, giacché a tempi lunghi la velocità v_x è trascurabilmente piccola.

Integriamo la seconda delle (3) riscritta come

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(g + \frac{b}{m} v_y\right)$$

Procedendo per separazione di variabili:

$$\int \frac{dv_y}{g + \frac{b}{m} v_y} = -\int dt,$$

si ottiene dopo semplici passaggi, l'integrale generale

$$v_y(t, C) = -g\tau + \tau C e^{-t/\tau}$$

Al solito, tenendo conto delle condizioni iniziali, otteniamo l'integrale particolare:

$$v_y(t) = (v_0 \sin\theta) e^{-t/\tau} + g\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right) \tag{9}$$

Riesce

$$\lim_{t \to +\infty} v_y(t) = g\tau = \frac{mg}{b} \overset{def}{=} v_{\lim}, \tag{10}$$

ovvero la *velocità limite.* Meno rigorosamente:

$$t \gg \tau \Longrightarrow v_y(t) \sim v_{\lim}$$

Per ricavare $y(t)$ dobbiamo eseguire un'ulteriore integrazione. Precisamente, riscrivendo la (9) come

$$\frac{dy}{dt} = (v_0 \sin\theta) e^{-t/\tau} + g\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right),$$

si ottiene

$$y(t, C) = -(v_0 \sin\theta) e^{-t/\tau} + g\tau \left(-\tau e^{-t/\tau} - t\right) + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Dalle condizioni iniziali segue l'integrale particolare

$$y(t) = \left(v_0 \tau \sin\theta + g\tau^2\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - g\tau t \tag{11}$$

Asintoticamente

$$y(t \gg \tau) \simeq v_0 \tau \sin\theta + g\tau^2 - v_{\lim}\tau,$$

cioè abbiamo un moto asintoticamente uniforme con velocità pari alla velocità limite (10). Abbiamo così ottenuto una rappresentazione parametrica della traiettoria

$$x(t) = (v_0 \tau \cos\theta)\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad y(t) = \left(v_0 \tau \sin\theta + g\tau^2\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) - g\tau t$$

Eliminando il parametro t tra queste due equazioni, otteniamo l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = x \tan\theta + g\tau^2 \left[\frac{x}{v_0 \tau \cos\theta} + \ln\left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos\theta}\right)\right] \tag{12}$$

In fig. 3 sono graficate le traiettorie per $b > 0$ e $b = 0$ rispettivamente.

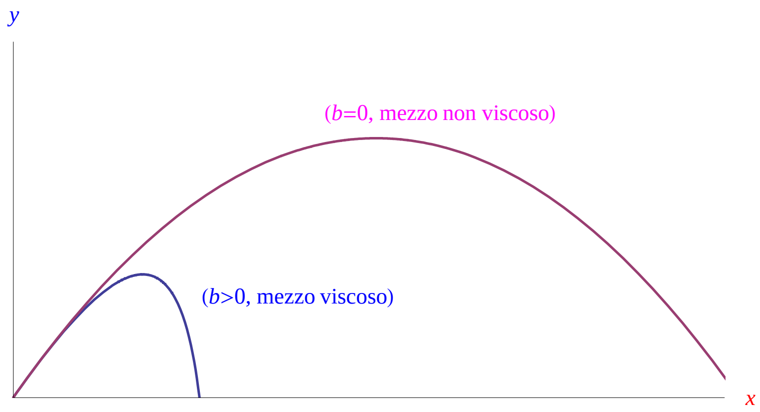


Figura 3: La curva in blue è la traiettoria per $b > 0$, mentre l'altra curva corrisponde al caso ideale di assenza di viscosità. Notiamo che nel caso non ideale la gittata è minore, e il proiettile va in caduta verticale. La costante di tempo è $\tau = 4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{s}$.

4 Regime nonlineare

Le equazioni differenziali del moto si scrivono

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \frac{b}{m}\dot{y}^{\alpha} \end{cases}, \tag{13}$$

per cui la seconda è nonlineare, mentre la prima ha il solito integrale particolare:

$$x(t) = (v_0 \tau \cos\theta)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{14}$$

La seconda può essere integrata numericamente. Ad esempio, per $\alpha = 2$ otteniamo la traiettoria riportata in fig. 4.

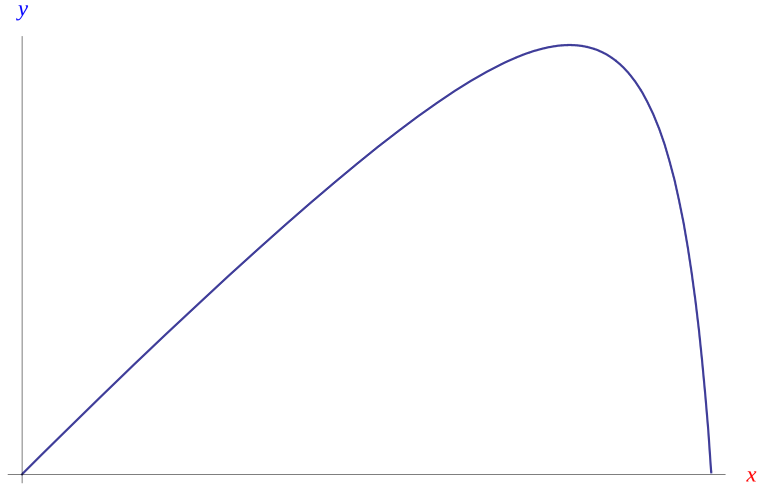


Figura 4: Traiettoria del proiettile che si muove in un mezzo viscoso in regime nonlineare ($\alpha = 2$).