Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato il dualismo onda-corpuscolo, secondo cui la materia esibisce proprietà corpuscolari od ondulatorie in funzione della configurazione sperimentale atta a studiarne il comportamento.

Per "corpuscolo" intendiamo un qualunque sistema fisico avente dimensioni trascurabili rispetto a quelle dell'ambiente in cui si muove. Geometricamente, un corpuscolo è rappresentato da un punto dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Denominazioni alternative sono *punto materiale* e *particella*. Assegnato un sistema di riferimento inerziale $K\left(Oxyz\right)$, supponiamo che siano note le equazioni orarie del moto, ossia consideriamo assegnata una rappresentazione parametrica regolare della traiettoria della particella, ove il parametro della rappresentazione è il tempo t misurato dall'orologio di K:

$$x = x\left(t\right), \quad y = y\left(t\right), \quad z = z\left(t\right), \qquad t \in [t_0, +\infty), \tag{1}$$

da cui è possibile ricavare – per derivazione rispetto a t – le componenti cartesiane del vettore velocità della particella in ogni istante di tempo:

$$v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y},\ \ v_z = \dot{z}, \tag{2}$$

e quindi della quantità di moto (o impulso):

$$p_x = mv_x,\ \ p_y = mv_y,\ \ p_z = mv_z \tag{3}$$

Orbene, il principio di interminazione di Heisenberg stabilisce:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2},\ \ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2},\ \ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4}$$

Senza formalizzarci troppo, diciamo che Δx, Δp_x, ..., esprimono l'incertezza con cui conosciamo la grandezza x (o p_x). Dalle disuguaglianze (4) segue l'impossibilità di misurare simultaneamente e con precisione infinita, coppie di grandezze $\left(x, p_x\right),\ \left(y, p_y\right),\ \left(z, p_z\right)$. Ad esempio, se misuriamo la componente p_x dell'impulso con precisione infinita ($\Delta p_x = 0$), si ha $\Delta x = +\infty$. Fisicamente questo risultato implica che la particella può avere un'ascissa qualunque (da $-\infty$ a $+\infty$). Al contrario, possiamo misurare y, z con precisione infinita anche se $\Delta p_x = 0$, con la differenza che si avrà $\Delta p_y = \Delta p_z = +\infty$, ovvero una indeterminazione sulle componenti p_y, p_z del vettore impulso. Queste considerazioni (che nascono da evidenze sperimentali) distruggono il concetto di traiettoria. Fondamentalmente, le predette evidenze sperimentali nascono da due esperienze ideali proposte da Heisenberg [1].

1 Diffrazione attraverso una fenditura

Una sorgente S emette un fascio di elettroni in cui ogni elettrone è schematizzato attraverso un corpuscolo di impulso $\mathbf{p}$. Il fascio incide perpendicolarmente su uno schermo Σ in cui è praticata una fenditura di larghezza d (cfr. fig. 1). Il singolo elettrone che attraversa la fenditura ha un'ordinata y nota con una indeterminazione:

$$\Delta y \sim d \tag{5}$$

Per l'ipotesi di De Broglie, il moto di un elettrone di impulso $\mathbf{p}$ equivale alla propagazione di un'onda piana e monocromatica:

$$\psi\left(\mathbf{x}, t\right) = Ae^{\frac{i}{\hbar}\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et\right)},$$

per cui l'impulso è legato al vettore d'onda dalla relazione $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ o ciò che è lo stesso, alla lunghezza d'onda $\lambda = h/p$. Per effetto della diffrazione, il vettore che definisce la direzione di propagazione (cioè $\mathbf{k}$) viene deviato di un angolo $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$, dove

$$\beta_0 \sim \frac{\lambda}{d}$$

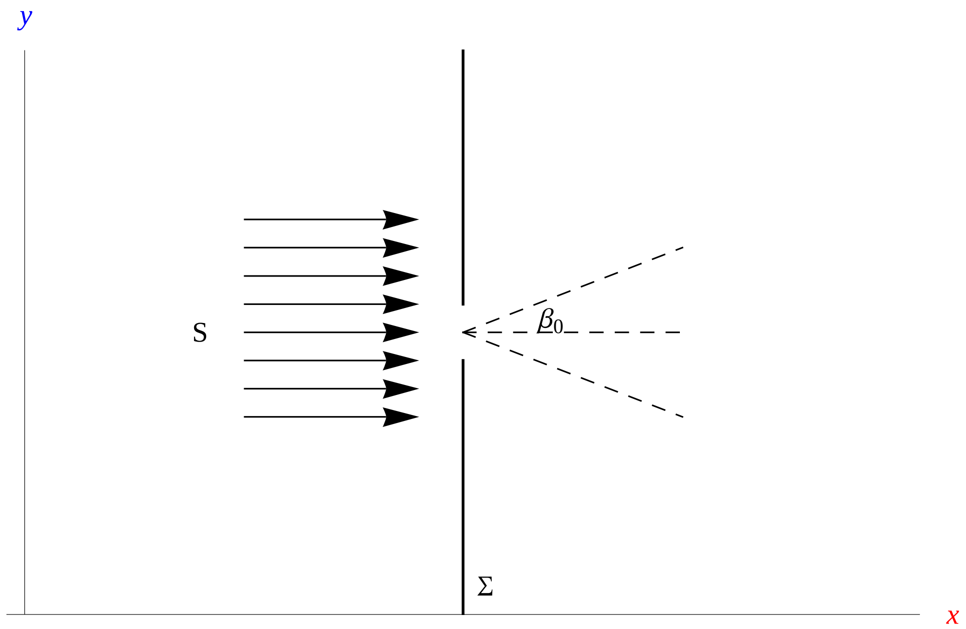

Figura 1: Diffrazione attraverso una fenditura di un fascio di elettroni.

Prima di attraversare Σ le componenti cartesiane dell'impulso dell'elettrone sono:

$$p_x = p\,, \quad p_y = 0,$$

giacché il fascio incide perpendicolarmente a Σ. Ma per quanto visto, la diffrazione può deviare il vettore $\mathbf{p}$ di un angolo $-\beta_0 \leq \beta \leq \beta_0$, per cui sarà $p_y = p \sin \beta$. Ne consegue un'indeterminazione

$$\Delta p_y \sim p \sin \beta_0 \sim \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \tag{6}$$

Tenendo conto della (5):

$$\Delta y \Delta p_y \sim h \tag{7}$$

In maniera analoga si perviene a

$$\Delta x \Delta p_x \sim h, \quad \Delta z \Delta p_z \sim h \tag{8}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Caldirola P. Cirelli R., Prosperi G.M. *Introduzione alla Fisica Teorica* Utet, 1987.