

Esercizio 37 (Mandò) – Il pozzo di Mandò

Marcello Colozzo - <http://www.extrabyte.info>

Esercizio 1 (Nel testo è il n. 37, pag. 90)

Per determinare la profondità h di un pozzo vi si lascia cadere un sasso e si misura il tempo T trascorso tra l'istante in cui si abbandona il sasso e quello in cui si ode il rumore prodotto dall'urto del sasso contro il fondo.

Eeguire il calcolo di h in generale, indicando con g l'accelerazione di gravità, con V la velocità del suono, e trascurando l'effetto della resistenza dell'aria sul moto di caduta. Si consideri poi il caso particolare $T = 3\text{ s}$, con $g = 9.8\text{ m/s}^2$ e $V = 330\text{ m/s}$; che errore si commetterebbe identificando T con il tempo di caduta (cioè ammettendo la propagazione istantanea del suono)?

Soluzione

Assumiamo un asse y verticale orientato verso il basso e con origine nel punto in cui è lasciato cadere il sasso (sommità del pozzo). Rispetto a tale sistema di riferimento l'equazione oraria del sasso è

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}gt^2, & \text{se } 0 \leq t \leq \tau \\ h, & \text{se } t > \tau \end{cases} \quad (1)$$

dove

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

è il tempo di caduta. Nell'istante τ il suono si propaga a velocità V verso la sommità del pozzo, impiegando un tempo

$$\tau' = \frac{h}{V},$$

per cui

$$T = \tau + \tau' = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{V},$$

ed è proprio l'equazione che dobbiamo risolvere (rispetto a h). Abbiamo

$$h^2 - 2\left(VT + \frac{V^2}{g}\right)h + V^2T^2 = 0,$$

da cui

$$h_{1,2} = \left(VT + \frac{V^2}{g}\right) \pm \sqrt{\frac{V^4}{g^2} + \frac{2V^3T}{g}}$$

Abbiamo un'indeterminazione sul segno. Per risolverla scriviamo

$$VT = V(\tau + \tau') = V\sqrt{\frac{2h}{g}} + h > h,$$

cioè deve essere manifestamente $h < VT$. Ciò implica che la soluzione accettabile è

$$h = \left(VT + \frac{V^2}{g}\right) - \sqrt{\frac{V^4}{g^2} + \frac{2V^3T}{g}}$$

ovvero

$$h = VT + \frac{V^2}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gT}{V}} \right) \quad (2)$$

Inserendo i dati numerici, si ha: $h = 40.56$ m. Per rispondere al secondo quesito ci limitiamo a confrontare i risultati per via grafica, cioè $h(T)$ per poi passare a $V \rightarrow +\infty$ (propagazione istantanea). Precisamente, grafichiamo in funzione di T , le funzioni:

$$h_{ex}(T) = VT + \frac{V^2}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gT}{V}} \right), \quad h_{app}(T) = \frac{1}{2}gT^2$$

I grafici sono in fig. ??.

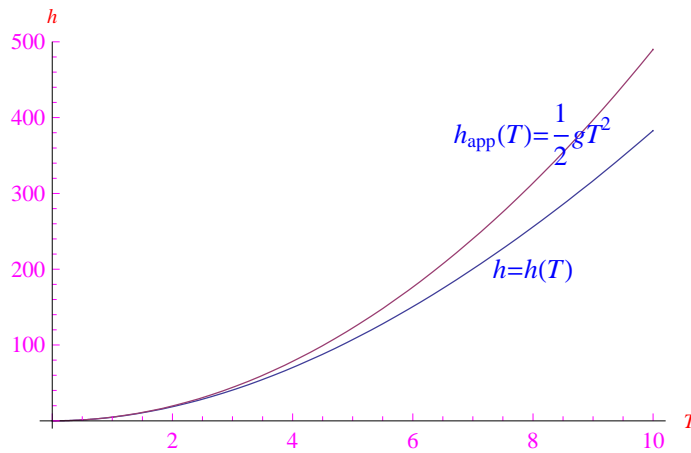


Figura 1: Esercizio ??.