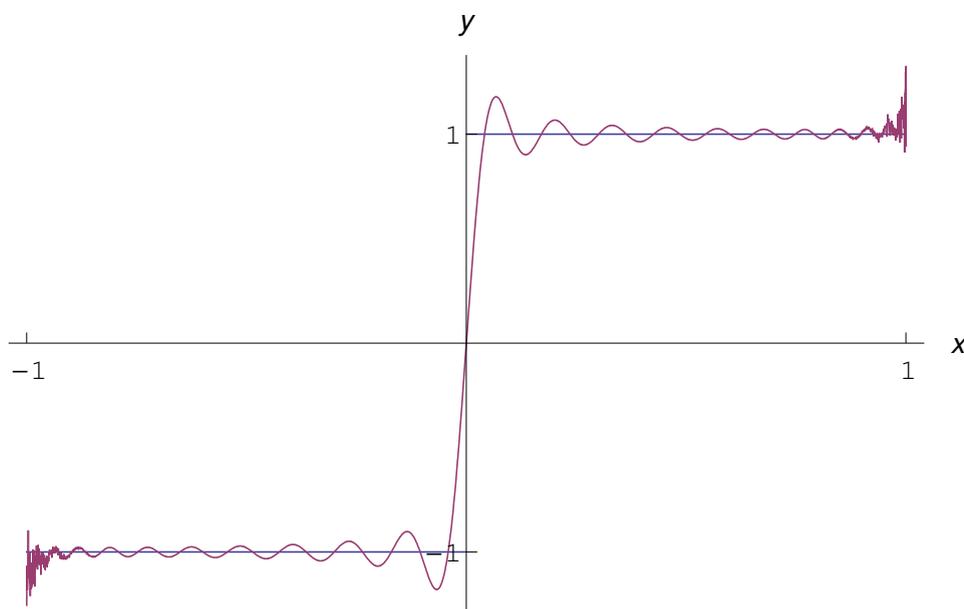




Approssimazione di un'onda quadra con i polinomi di Legendre e con i polinomi di Tchebichef

Marcello Colozzo



Sommario

Confrontiamo le approssimazioni della restrizione della funzione $\text{sign}(x)$ all'intervallo $[-1, 1]$, ottenute con: 1) i polinomi di Legendre; 2) i polinomi trigonometrici; 3) i polinomi di Tchebichef. Tali approssimazioni sono accomunate da oscillazioni del tipo *fenomeno di Gibbs*, in corrispondenza dei punti di discontinuità della funzione.

1 Polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre sono definiti da:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Ad esempio:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \dots \quad (2)$$

Un calcolo diretto dimostra che il sistema:

$$\Sigma_n = \{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$$

è ortogonale, quindi linearmente indipendente e denotiamo con Λ_n il sottospazio vettoriale $(n+1)$ -dimensionale, di $C([-1, 1])$ generato da Σ_n . Tale sistema può essere normalizzato, ottenendo la base ortonormale di Λ_n :

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k(x) \right\}_{k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}} \quad (3)$$

Presa ad arbitrio un funzione $f \in C([-1, 1])$, la sua migliore approssimazione è $\theta_n \in \Lambda_n$ con

$$\theta_n(x) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{2k+1}{2}} c_k P_k(x),$$

dove

$$\begin{aligned} c_k &= \left\langle \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k, f \right\rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \langle P_k, f \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \int_{-1}^1 P_k(x) f(x) dx, \end{aligned}$$

che sono le coordinate di Fourier di f nella base \mathcal{B}_n . In tal caso si chiamano *coordinate di Legendre* di f nella base \mathcal{B}_n . Riesce:

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) \int_{-1}^1 P_k(\xi) f(\xi) d\xi$$

Consideriamo ora la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{per } x = 0 \\ -1, & \text{per } -1 < x \leq 0 \end{cases}, \quad (4)$$

confrontando l'approssimazione $f \sim \theta_n$ con quella ottenuta mediante i polinomi trigonometrici. Precisamente:

$$\tau_{2n+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \right],$$

con le coordinate di Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Nel caso in esame è $T = 2$ e, essendo f funzione dispari si ha che i coefficienti a_k sono tutti nulli, per cui sopravvivono solo i b_k :

$$b_k = \frac{2}{k} \left(1 - (-1)^k\right), \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Quindi:

$$\tau_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) \quad (5)$$

A questo punto fissiamo l'ordine di approssimazione $n = 45$:

$$\theta_{45}(x) = \sum_{k=0}^{45} \frac{2k+1}{2} c_k P_k(x) \left[\int_0^{-1} P_k(\xi) d\xi + \int_0^1 P_k(\xi) d\xi \right]$$

$$\tau_{91}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{90} \frac{1 - (-1)^k}{k} \sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)$$

Utilizzando *Mathematica* possiamo graficare le approssimazioni e confrontarle con l'andamento esatto, come mostrato nelle figg. 1-2.

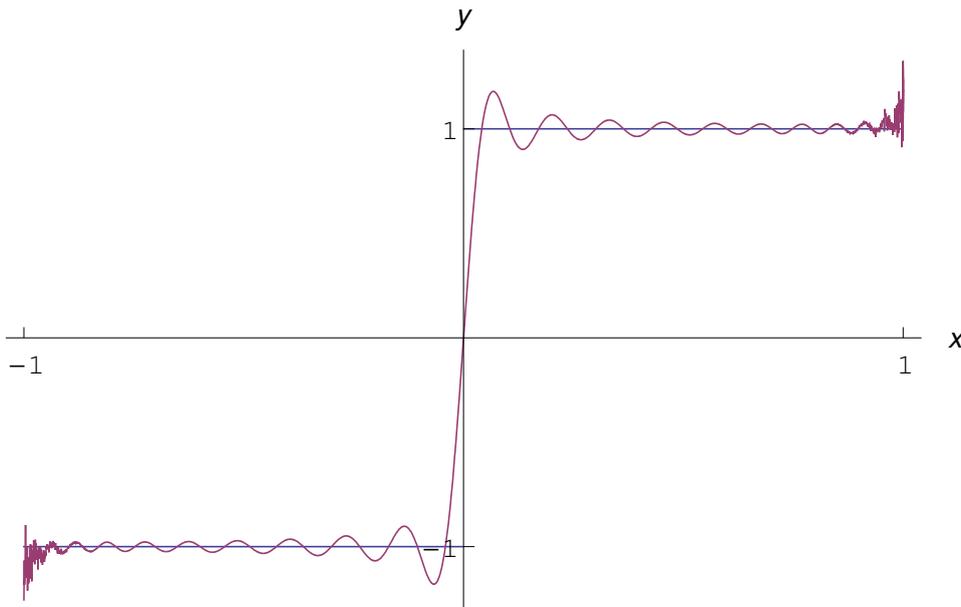


Figura 1: Approssimazione della funzione del tipo “onda quadra” mediante i polinomi di Legendre.

1.1 Polinomi di Tchebichef

Approssimiamo la nostra funzione (4) utilizzando i *polinomi di Tchebichef*:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} (1 - x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

Ad esempio i primi quattro polinomi di Tchebichef sono:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

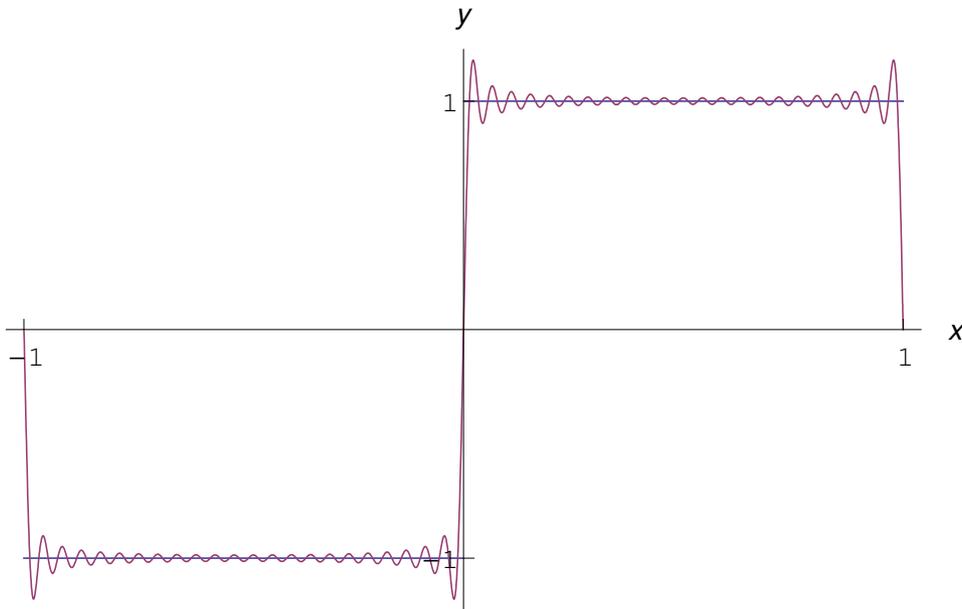


Figura 2: Approssimazione della funzione del tipo “onda quadra” mediante un polinomio trigonometrico.

Introduciamo in $C([a, b])$ il prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) g(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx$$

Un calcolo diretto dimostra che il sistema

$$\{T_0(x), T_1(x), \dots, T_n(x)\}, \quad (7)$$

è ortogonale in $C([a, b])$, avendosi:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx \neq 0 \iff n \neq m$$

Detto V_n il sottospazio vettoriale di $C([a, b])$ generato da (7) segue che normalizzando $T_k(x)$ si ottiene la seguente base ortonormale di V_n :

$$\mathcal{B}_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1(x), \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) \right\} \quad (8)$$

Ciò premesso, studiamo l'approssimazione $f \sim \chi_n \in V_n$, dove:

$$\chi_n(x) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^n c_k T_k(x)$$

Come di consueto, i coefficienti c_k sono le coordinate di Fourier nella base \mathcal{B}_n , che ora chiamiamo *coordinate di Tchebichef* nella base \mathcal{B}_n . Riesce:

$$c_0 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0(x), f(x) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 T_0(x) f(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx$$

$$c_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_k(x), f(x) \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^1 T_k(x) f(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

cosicchè:

$$f(x) \sim \chi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_0(\xi) f(\xi) (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi \quad (9)$$

$$+ \sum_{k=1}^n T_k(x) \int_{-1}^1 T_k(\xi) f(\xi) (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi$$

Utilizzando *Mathematica* possiamo graficare l'approssimazione (9) di ordine $n = 45$ e confrontarla con l'andamento esatto, come mostrato in fig. 3.

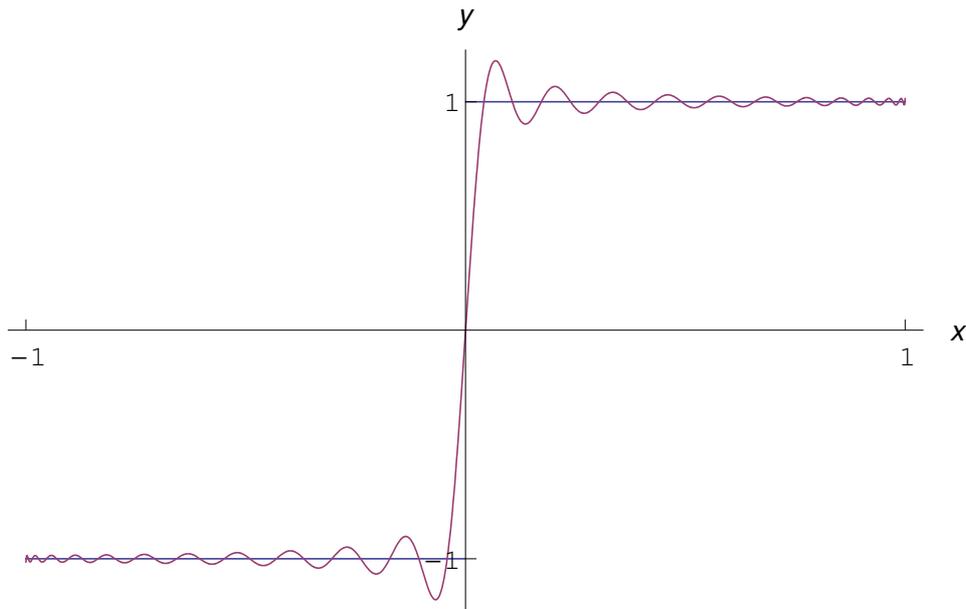


Figura 3: Approssimazione della funzione del tipo “onda quadra” mediante i polinomi di Tchebichef.