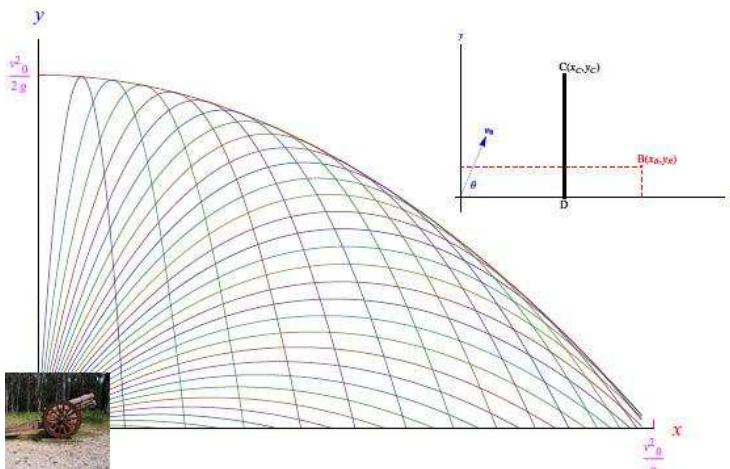


## Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

### Un problema di balistica esterna: la parabola di sicurezza

Marcello Colozzo



## Indice

1	Introduzione	2
2	Massima gittata	3
3	Famiglia di traiettorie. La curva involuppo	4
4	La parabola di sicurezza	5
5	Condizione di raggiungibilità	5

# 1 Introduzione

Rielaboriamo un problema di Fisica 1 tratto dal testo [Guida alla soluzione di problemi di Fisica 1](#)

**Esercizio 1** In un riferimento cartesiano ( $Oxy$ ) con l'asse  $y$  disposto verticalmente ed orientato verso l'alto (fig. 1), un cannone è posto in  $O$  e da tale punto è in grado di sparare proiettili con velocità iniziale  $v_0$  e "alzo" (angolo di lancio)  $\theta$  che può variare con continuità da  $0$  a  $\pi/2$ .

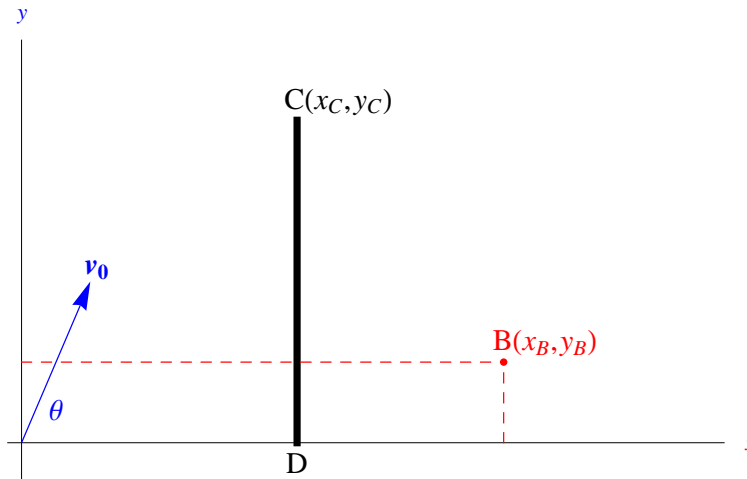


Figura 1: Esercizio 1

1. Determinare i valori della variabile reale  $\theta$  per i quali il proiettile colpisce il bersaglio  $B$  nascosto da un ostacolo schematizzato dal segmento  $\overline{CD}$  (sono le coordinate cartesiane di  $B$  e  $D$ , come illustrato in fig. 1).
2. Discutere il risultato assumendo come parametri liberi le coordinate dei punti  $B, C, D$ .

(Trascurare la resistenza dell'aria)

## Soluzione

Applicando il secondo principio della dinamica, si perviene alle equazioni parametriche della traiettoria del proiettile (assumendo come parametro il tempo  $t$ ):

$$x = (v_0 \cos \theta) t, \quad y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

Eliminando il parametro, otteniamo l'equazione cartesiana della traiettoria

$$\gamma : y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2, \quad (2)$$

che è una parabola per l'origine e con la concavità verso il basso. Infatti:

$$y = 0 \iff x \left( \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x \right) = 0, \quad (3)$$

da cui le ascisse dei punti di intersezione con l'asse  $x$ :

$$x = 0, \quad x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (4)$$

La radice non nulla è la *gittata*

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta \quad (5)$$

Denotando con  $V(x_V, y_V)$  il vertice della parabola, per evidenti ragioni di simmetria, si ha:

$$x_V = \frac{R}{2}, \quad (6)$$

mentre

$$y_V = x_V \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_V^2$$

Cioè

$$y_V = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta, \quad (7)$$

che è la massima altezza raggiunta dal proiettile. Incidentalmente,  $y_V$  è un massimo relativo per la funzione (2), per cui avremmo potuto applicare il procedimento standard che consiste nel trovare le radici dell'equazione

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

## 2 Massima gittata

Per un assegnato valore di  $|\mathbf{v}_0|$ , la gittata è una funzione della variabile reale  $\theta$ :

$$R(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (8)$$

Riesce

$$R(0) = 0, \quad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La derivata prima è

$$R'(\theta) = \frac{2v_0^2}{g} \cos 2\theta \quad (9)$$

Sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle, per cui

$$\exists \theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \mid R'(\theta_0) = 0$$

Infatti, dalla (9):

$$R'(\theta) = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff \theta_0 = \frac{\pi}{4},$$

che è un punto estremale per la funzione  $R(\theta)$ . Più precisamente, è un punto di massimo relativo:

$$R''(\theta) = -\frac{4v_0^2}{g} \sin 2\theta \implies R''(\theta_0) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

Ne consegue che la massima gittata (per un assegnato  $|\mathbf{v}_0|$ ) si ottiene con un alzo di  $\pi/4$ .  
Segue

$$R_{\max} = R(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g} \quad (10)$$

### 3 Famiglia di traiettorie. La curva involuppo

Riprendiamo l'equazione cartesiana della traiettoria

$$\gamma : y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (11)$$

Al variare di  $\theta$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  tale equazione descrive una famiglia  $\Phi$  di parabole a un parametro ( $\theta$ ). Più precisamente, un assegnato  $\theta$  individua una ed una sola parabola  $\gamma_\theta \in \Phi$ . Per una ragione che sarà chiara a breve, determiniamo la curva involuppo della predetta famiglia. A tale scopo applichiamo il **procedimento standard** per la ricerca di una curva involuppo, per cui scriviamo

$$f(x, y, \theta) = 0, \quad (12)$$

dove

$$f(x, y, \theta) \stackrel{def}{=} x \tan \theta - y - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (13)$$

Derivando rispetto a  $\theta$

$$f_\theta(x, y, \theta) = \frac{x}{\cos^2 \theta} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad (14)$$

Mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} f(x, y, \theta) = 0 \\ f_\theta(x, y, \theta) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \tan \theta - y - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0 \\ \frac{x}{\cos^2 \theta} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Ricaviamo  $x$  dalla seconda

$$x \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \right) = 0 \xrightarrow{x \neq 0} x = \frac{v_0^2}{g \tan \theta},$$

che sostituito nella prima

$$y = \frac{v_0}{g} - \frac{v_0}{2g \sin^2 \theta}$$

Le equazioni ottenute

$$x = \frac{v_0^2}{g \tan \theta}, \quad y = \frac{v_0}{g} - \frac{v_0}{2g \sin^2 \theta}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

costituisce una rappresentazione parametrica della curva involuppo. Per ottenere l'equazione cartesiana, dobbiamo eliminare il parametro  $\theta$ . A tale scopo utilizziamo la nota formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta},$$

onde

$$y = \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{1}{\tan^2 \theta} \right)$$

Ma  $\tan \theta = \frac{v_0^2}{gx}$ , per cui

$$\Gamma : y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \quad (16)$$

che è l'equazione della curva involuppo, come mostrato in fig. 2. Si noti che l'ascissa del punto di intersezione della curva involuppo con l'asse  $x$  è proprio la massima gittata  $R_{\max}$ , mentre il vertice è

$$V \left( 0, \frac{v_0^2}{2g} \right)$$

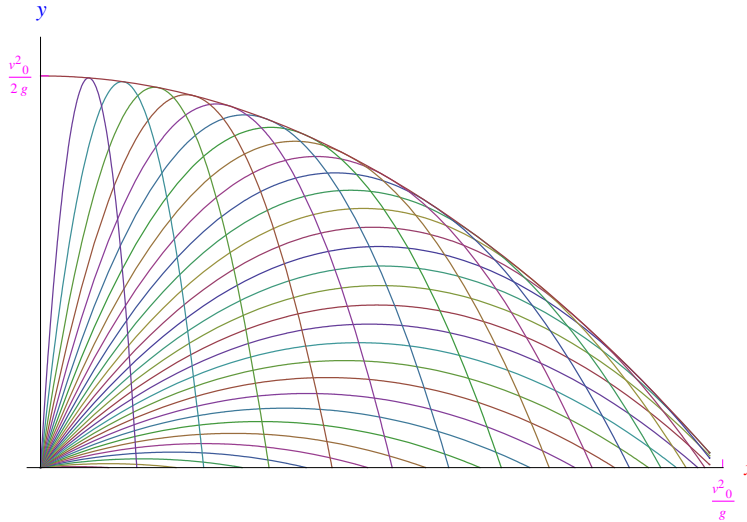


Figura 2: Inviluppo della famiglia di curve piane (2).

## 4 La parabola di sicurezza

Ricordiamo che  $v_0 = |\mathbf{v}_0|$  è assegnato una volta per tutte e l'unico parametro libero è l'alzo  $\theta$ ; da qui l'interpretazione cinematica della curva inviluppo: i bersagli raggiungibili sono tutti e soli i punti contenuti nella regione:

$$T = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{v_0^2}{g}, 0 \leq y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \right\}, \quad (17)$$

che si identifica con il rettangoloide di base  $\left[0, \frac{v_0^2}{g}\right]$  relativo alla funzione

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Ciò suggerisce la seguente definizione:

**Definizione 2** *L'inviluppo della famiglia  $\Phi$  di traiettorie, si dice **parabola di sicurezza**.*

In altri termini, per un'assegnata velocità iniziale  $v_0$ , possono essere colpiti tutti e soli i bersagli (supposti puntiformi) che si trovano all'interno della parabola di sicurezza, includendo i punti appartenenti alla parabola medesima.

## 5 Condizione di raggiungibilità

Consideriamo, ora, un bersaglio  $P(x_0, y_0)$  quale punto appartenente alla regione  $T$ , cioè

$$0 \leq x_0 \leq \frac{v_0^2}{g}, 0 \leq y_0 \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_0^2 \quad (18)$$

Determiniamo l'angolo di lancio per colpire  $P$ :

$$\begin{aligned} P \in \gamma &\iff y_0 = x_0 \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x_0^2 \\ &\iff y_0 = x_0 \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x_0^2, \end{aligned}$$

da cui l'equazione quadratica in  $\tan^2 \theta$ :

$$gx_0^2 \tan^2 \theta - 2v_0^2 x_0 \tan \theta + 2v_0^2 y_0 + gx_0^2 = 0 \quad (19)$$

Risolvendo

$$\tan \theta = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{\frac{gx_0}{v_0^2}}, \quad (20)$$

dove  $\Delta$  è il discriminante dell'equazione ed è pari a

$$\Delta = 1 - \frac{2g}{v_0^2} y_0 - \frac{g^2 x_0^2}{v_0^4} \quad (21)$$

Riesce

$$\Delta = 0 \iff 1 - \frac{2g}{v_0^2} y_0 - \frac{g^2 x_0^2}{v_0^4} = 0 \iff y_0 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_0^2}{2v_0^2} \implies P_0 \in \Gamma = \partial T$$

Come c'era da aspettarsi (per definizione di involuppo), esiste ed è unica la traiettoria che colpisce un bersaglio appartenente alla parabola di sicurezza. In tal caso, l'alzo è dato da

$$\theta = \arctan \left( \frac{v_0^2}{gx_0} \right) \quad (22)$$

come illustrato in fig. 3.

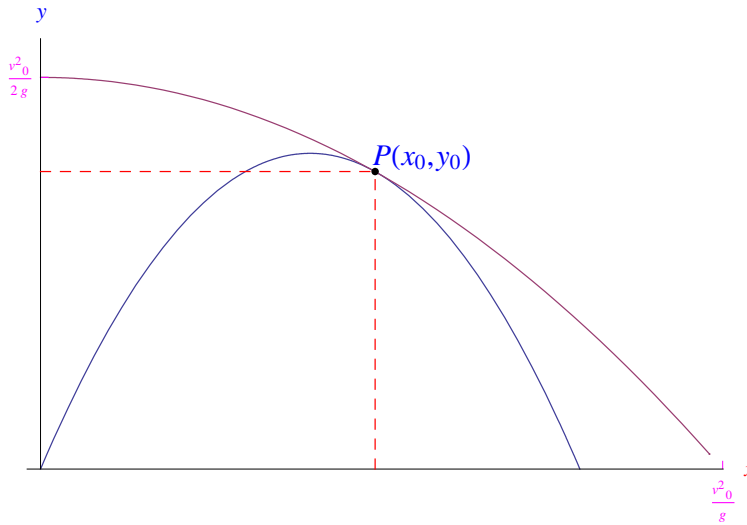


Figura 3: Se il bersaglio è sulla parabola di sicurezza, può essere raggiunto da una sola traiettoria.

Viceversa

$$\Delta > 0 \iff 1 - \frac{2g}{v_0^2} y_0 - \frac{g^2 x_0^2}{v_0^4} > 0 \iff y_0 < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx_0^2}{2v_0^2} \implies P_0 \in \overset{\circ}{T},$$

cioè  $P$  è interno alla parabola di sicurezza, ed è raggiungibile da due traiettorie distinte, ciascuna delle quali determinate dalle radici  $\theta_{\pm}$ :

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y_0 - \frac{g^2 x_0^2}{v_0^4}}}{\frac{gx_0}{v_0^2}},$$

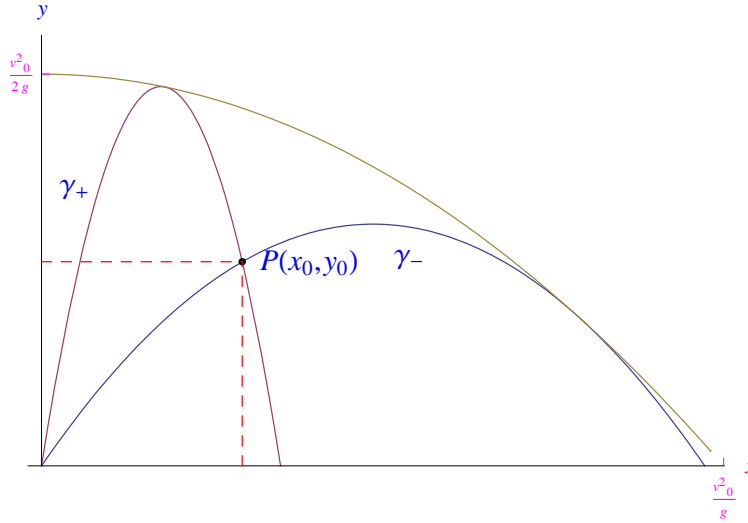


Figura 4: Se il bersaglio è interno alla parabola di sicurezza, può essere raggiunto da due traiettorie distinte.

come illustrato in fig. 4. Infine, se  $\Delta < 0$  il bersaglio è al di fuori della parabola di sicurezza, e non può essere colpito.

Ne consegue che condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché il proiettile colpisca il bersaglio  $B$  è

$$0 \leq x_B \leq \frac{v_0^2}{g}, \quad 0 \leq y_B \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_B^2 \quad (23)$$

Più precisamente, se tali condizioni sono verificate in senso stretto ovvero  $B$  è interno alla regione  $T$ , allora l'altezza  $y_C$  dell'ostacolo deve essere all'interno della regione  $T'$  individuata da una delle traiettorie che raggiungono  $B$ . Infatti, una volta verificate le condizioni:

$$0 \leq x_B < \frac{v_0^2}{g}, \quad 0 \leq y_B < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_B^2, \quad (24)$$

calcoliamo

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v_0^2} y_0 - \frac{g^2 x_0^2}{v_0^4}}}{\frac{g x_0}{v_0^2}} \stackrel{def}{=} \eta_{\pm}, \quad (\eta_+ > \eta_-) \quad (25)$$

Abbiamo quindi le traiettorie:

$$\gamma_{\pm} : y = x\eta_{\pm} - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \eta_{\pm}^2) x^2 \quad (26)$$

Se risulta

$$y_C > x\eta_{\pm} - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \eta_{\pm}^2) x^2,$$

il proiettile non può essere raggiunto, come vediamo dalla fig. 5

Consideriamo ora il caso:

$$x\eta_- - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \eta_-^2) x^2 < y_C < x\eta_+ - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \eta_+^2) x^2 \quad (27)$$

Qui il proiettile verrà raggiunto dalla traiettoria a cui compete l'alzo  $\theta_+$ . La configurazione cinematica è illustrata in fig.6. Infine, se



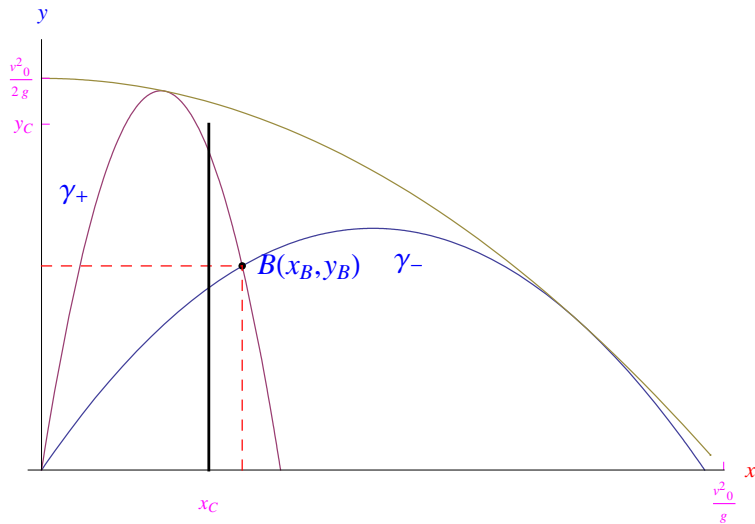


Figura 5: Ostacolo troppo alto. Il bersaglio non può essere raggiunto.

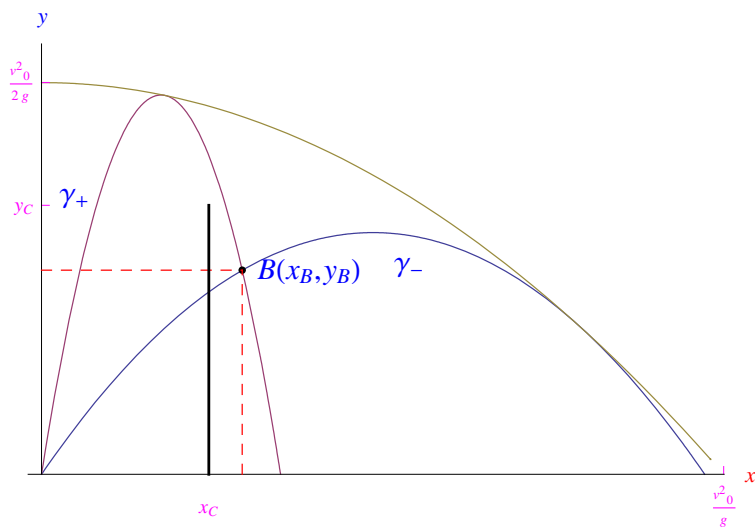


Figura 6: Il bersaglio è raggiunto da  $\gamma_+$ .

$$y_C < x\eta_- - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \eta_-^2) x_C^2, \quad (28)$$

il bersaglio è raggiungibile da entrambe le traiettorie.

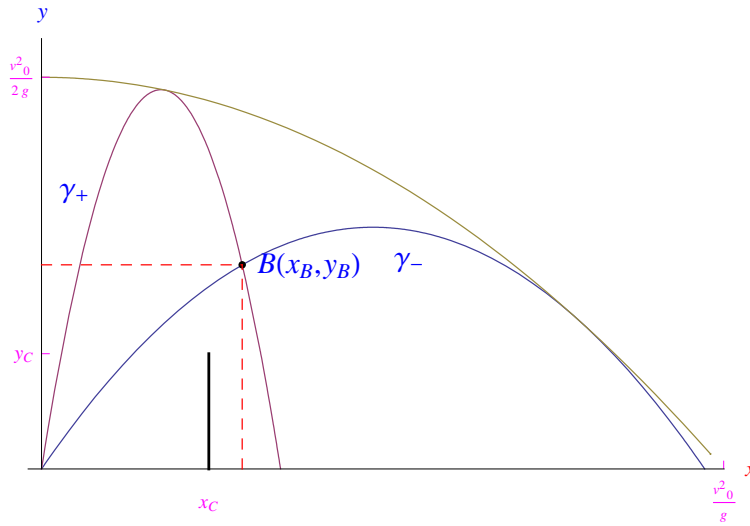


Figura 7: Il bersaglio è raggiunto da entrambe le traiettorie  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$ .