Moto di proiettili

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Per studiare il moto di un proiettile sparato da un cannone, trascurando la resistenza dell'aria, schematizziamo il proiettile attraverso un punto materiale di massa m, dopodiché fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale con l'asse y verticale, come mostrato in fig. 1. Se $\mathbf{v}_0$ è la velocità iniziale i.e. la velocità con cui viene sparato il proiettile, si ha:

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta \mathbf{i} + v_0 \sin\theta \mathbf{j}, \tag{1}$$

dove $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ sono i versori degli assi coordinati, mentre θ è il cosiddetto *alzo*.

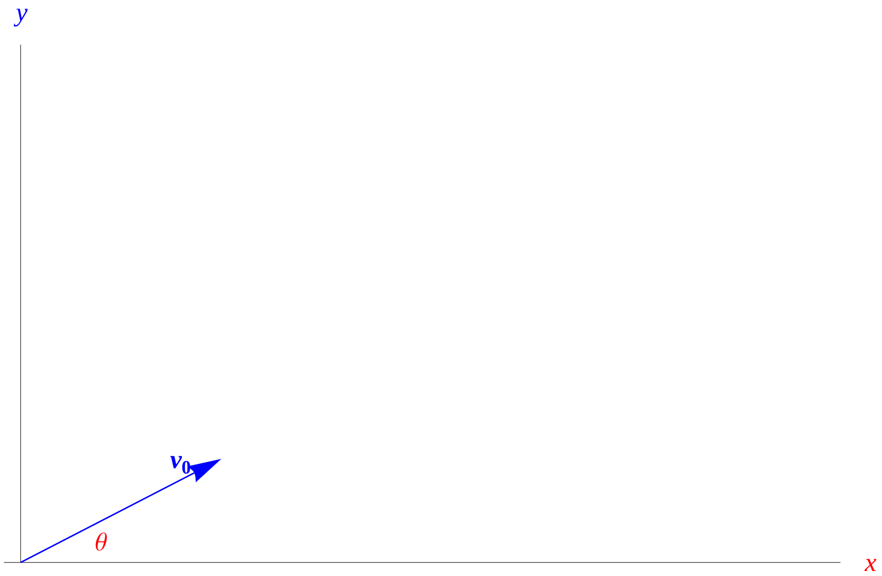

Figura 1: Il vettore $\mathbf{v}_0$ è la velocità iniziale del proiettile.

Se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ è il vettore posizione del proiettile a tutti i tempi, per la seconda legge di Newton dovrà aversi:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g} \Longleftrightarrow \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}, \tag{2}$$

giacché l'unica forza a cui è sottoposto il proiettile è la forza peso $m\mathbf{g}$. Per come abbiamo preso il sistema di riferimento, si ha che $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ per cui proiettando la (2) sugli assi coordinati, si ha:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}, \tag{3}$$

ovvero un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Più specificatamente, le equazioni sono *disaccoppiate*, nel senso che possiamo integrarle separatamente. Dalla prima eseguendo un'integrazione rispetto a t

$$\frac{dx}{dt} = C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{R}$$

Integrando nuovamente

$$x(t) = C_0 t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Le costanti di integrazione C_0, C_1 si determinano dalle condizioni iniziali:

$$x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 \cos\theta,$$

da cui

$$C_1 = 0, \ \ C_0 = v_0 \cos\theta$$

Ora possiamo scrivere l'ascissa del proiettile a tutti i tempi:

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \quad \forall t \geq 0 \tag{4}$$

Passiamo alla seconda equazione del sistema (3). Integrando rispetto a t

$$\frac{dy}{dt} = -gt + K_0, \quad K_0 \in \mathbb{R}$$

Integrando nuovamente:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + K_0 t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$$

Qui le costanti di integrazione K_0, K_1 sono tali che

$$y(0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = v_0 \sin\theta,$$

da cui

$$K_0 = v_0 \sin\theta, \ \ K_1 = 0$$

Tali valori ci consentono di scrivere

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2, \quad \forall t \geq 0 \tag{5}$$

Le equazioni orarie (4)-(5) compongono una rappresentazione parametrica della traiettoria Γ del proiettile, ove il parametro è il tempo t:

$$\Gamma : x(t) = v_0 t \cos\theta, \ \ y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2, \quad t \in [0, +\infty) \tag{6}$$

Vediamo, dunque, che i moti componenti secondo gli assi coordinati sono rispettivamente rettilineo uniforme (asse x) ed uniformemente ritardato (asse y) con decelerazione di modulo $g \simeq 9.81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. L'equazione ordinaria della traiettoria del proiettile si ottiene eliminando il parametro t dalle (6):

$$\Gamma : y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}, \tag{7}$$

che per un assegnato θ, è l'equazione di una parabola. Supponendo $0 < \theta < \pi/2$, determiniamo l'intersezione con l'asse x. Scartando la soluzione banale $x = 0$, otteniamo la *gittata*:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta \tag{8}$$

Dal momento che il coefficiente del termine quadratico è negativo, si ha che la parabola volge la concavità verso il basso. Inoltre, per una evidente questione di simmetria, il vertice V della parabola – ossia la massima quota raggiunta dal proiettile – ha ascissa $x_V = \frac{R}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta$ e ordinata

$$\begin{aligned} y_V \equiv y_{\max} = y(x_V) &= \frac{2v_0^2}{2g} \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} \frac{4v_0^4}{4g^2} \sin^2\theta\cos^2\theta \qquad (9) \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sin^2\theta - \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \\ &= \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \end{aligned}$$

Si perviene al medesimo risultato utilizzando le equazioni parametriche. Più precisamente, si tratta di determinare il massimo relativo della funzione (5). A tale scopo calcoliamo gli zeri della derivata prima

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta - gt$$

Cioè

$$v_0 \sin\theta - gt = 0 \Longleftrightarrow t_* = \frac{v_0}{g}\sin\theta$$

La derivata seconda è l'accelerazione:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g < 0 \Longrightarrow \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=t_*} = -g < 0,$$

onde t_* è punto di massimo relativo, ed è facile convincersi che è punto di massimo assoluto per $y(t)$. Segue

$$y_{\max} = y(t_*) = \frac{v_0^2}{g}\sin^2\theta - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2}\sin^2\theta = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \qquad (10)$$

La traiettoria del proiettile è illustrata in fig. 2.

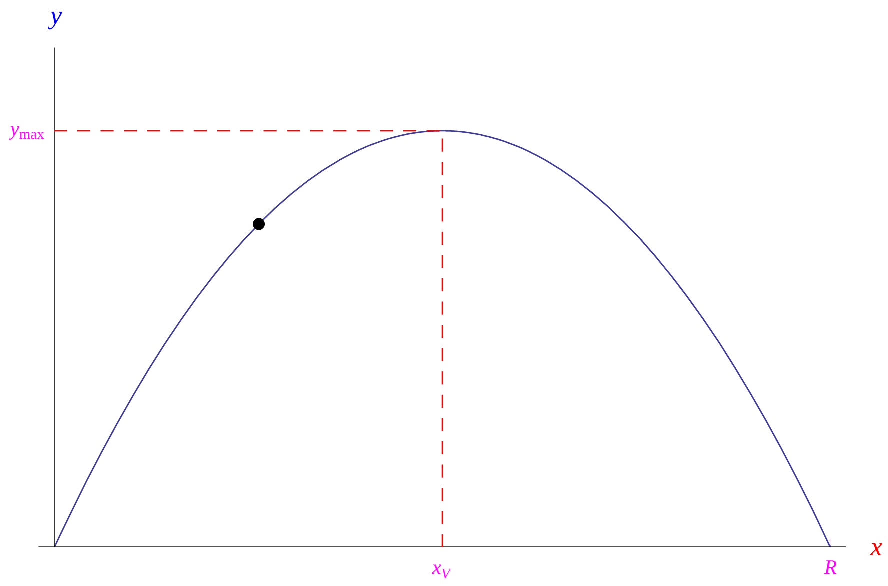

Figura 2: Traiettoria di un proiettile schematizzato da un punto materiale di massa m, sparato a $t = 0$ con velocità $\mathbf{v}_0$.