[file scaricato da http://www.extrabyte.info]

Esercizio 1 *Assegnati gli infinitesimi (per $x \to 0^+$):*

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right), \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Determinare:

1. *L'ordine di infinitesimo di f rispetto a g.*

2. *Determinare la parte principale di f.*

Svolgimento

Eseguiamo il cambio di variabile $t = x^2$, per cui:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t^{\alpha/4}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \frac{4}{\alpha} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+t}}{t^{\frac{\alpha-4}{4}}} \\
&= \frac{4}{\alpha} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(1+t)\, t^{\frac{\alpha-4}{4}}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 4
\end{aligned}$$

Ne consegue che $\ln\left(1 + x^2\right)$ è del quart'ordine rispetto a $\sqrt{x}$. Il limite vale:

$$l = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{(1+t)} = 1,$$

per cui la parte principale è

$$p(x) = g(x)^4 = x^2$$

Ciò implica

$$\ln\left(1 + x^2\right) \simeq x^2, \quad x \in (0, \delta),$$

come mostrato in fig. 1

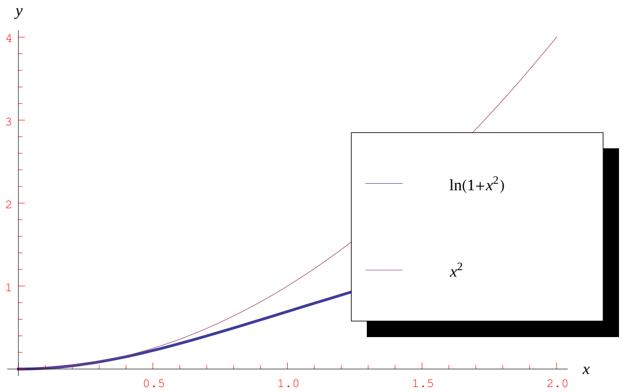

Figure 1: In un intorno destro di $x = 0$, la funzione $\ln\left(1 + x^2\right)$ è ben approssimata dalla funzione potenza di esponente 2, cioè x^2.