Esercizio sui moti relativi

Marcello Colozzo

Esercizio 1 *Rispetto a un sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ una pallina si muove secondo le seguenti leggi orarie:*

$$x'(t) = A\cos\Omega t,\ \ y'(t) = B\sin\Omega t,\quad z'(t) = Ct^2, \tag{1}$$

ove $A, B, C > 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza, mentre $\Omega > 0$ è una costante con le dimensioni di una frequenza angolare. Il sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ ruota attorno all'asse z di un sistema di coordinate fisso $K(Oxyz)$ avente in comune l'origine O con K' e l'asse z. Determinare la velocità relativa e la velocità assoluta della pallina. Per quali valori delle predette costanti, l'osservatore K' vede la pallina muoversi lungo l'asse z?

Soluzione

Derivando le equazioni orarie fornite dall'esercizio, otteniamo immediatamente la velocità relativa:

$$\mathbf{v}_r = -(\Omega A\sin\Omega t)\,\mathbf{i}' + (\Omega B\cos\Omega t)\,\mathbf{j}' + 2Ct\mathbf{k}'$$

ove l'apice ci sta dicendo che ci riferiamo alla terna rotante. Per determinare la velocità assoluta, applichiamo il metodo delle matrici di rotazione. Già sappiamo che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\omega t)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo

$$R(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(\omega t)^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Per una matrice ortogonale, l'inversa coincide con la trasposta:

$$R_z(\omega t)^{-1} = R_z(\omega t)^T = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cos\Omega t\cos\omega t + B\sin\Omega t\sin\omega t \\ -A\cos\Omega t\sin\omega t + B\sin\Omega t\cos\omega t \\ Ct^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Ne consegue che le equazioni orarie della pallina nel riferimento K sono:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\Omega t\cos\omega t + B\sin\Omega t\sin\omega t \qquad (3)\\ y &= -A\cos\Omega t\sin\omega t + B\sin\Omega t\cos\omega t \\ z &= Ct^2, \end{aligned}$$

la cui derivata restituisce le componenti cartesiane (in K) della velocità assoluta:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (\Omega B - \omega A)\cos\Omega t \sin\omega t + (\omega B - \Omega A)\sin\Omega t\cos\omega t \\
\dot{y} &= (\Omega A - \omega B)\sin\Omega t \sin\omega t + (\Omega B - \omega A)\cos\Omega t\cos\omega t \\
\dot{z} &= 2Ct
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_a = {}& [(\Omega B - \omega A)\cos\Omega t \sin\omega t + (\omega B - \Omega A)\sin\Omega t\cos\omega t]\,\mathbf{i} + \\
& + [(\Omega B - \omega A)\cos\Omega t \sin\omega t + (\omega B - \Omega A)\sin\Omega t\cos\omega t]\,\mathbf{i} + 2Ct\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Se le costanti assegnate sono tali che

$$\begin{cases} \Omega B - \omega A = 0 \\ \omega B - \Omega A = 0 \end{cases}$$

la pallina compie un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse z, nel verso delle z crescenti. Infatti:

$$\mathbf{v}_a = 2Ct\mathbf{k}$$

Nelle figg. 1-2 riportiamo l'andamento della traiettoria della pallina rispetto a entrambe le terne di riferimento.

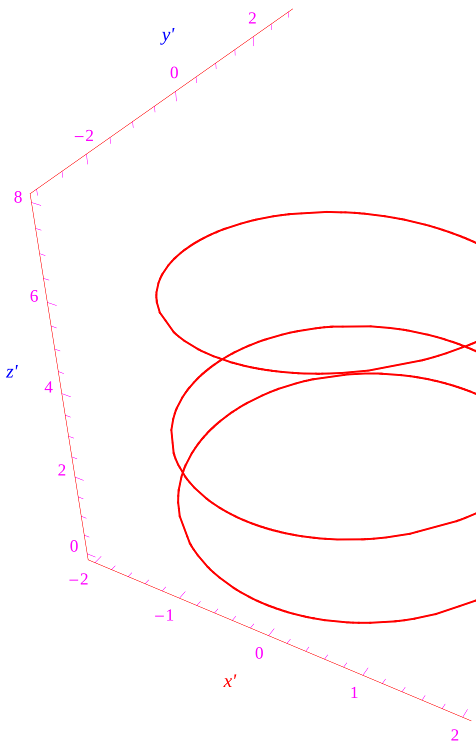

Figura 1: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento rotante.

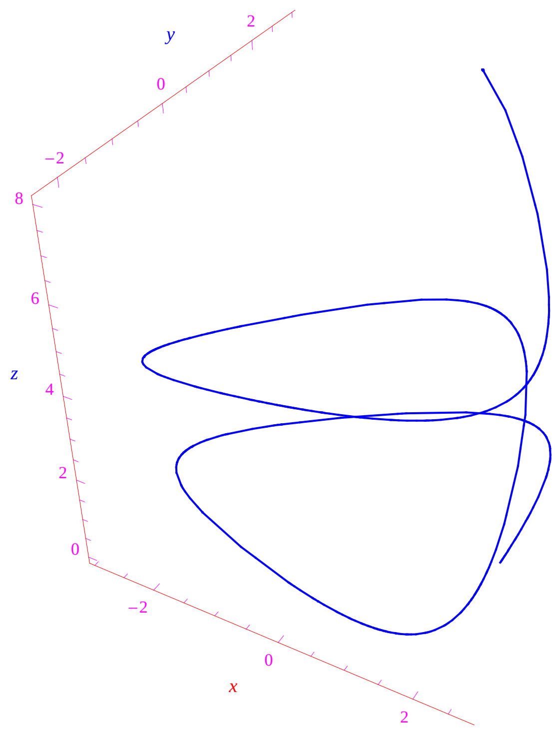

Figura 2: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento fisso.