Appunti di Fisica 1

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

1 Moto unidimensionale in un campo conservativo

Senza perdita di generalità, consideriamo un punto materiale che compie un moto unidimensionale sotto l'azione di un campo conservativo. Le conclusioni a cui giungeremo si generalizzano facilmente al caso tridimensionale.

Più specificatamente, un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x sede di un campo di forze $\mathbf{F}(x)$ conservative[1] i.e. derivante da un'energia potenziale $V(x)$:

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \tag{1}$$

La funzione $V(x)$ è per ipotesi definita in $(-\infty, +\infty)$ risultalndo ivi analitica (i.e. sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto del campo di esistenza). Denominiamo poi con V_0 il minimo assoluto di $V(x)$. Riguardo al comportamento all'infinito, poniamo

$$V_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} V(x) \tag{2}$$

Ovviamente può presentarsi il caso di comportamento divergente.

Esempio 1 *Per l'oscillatore armonico è*

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

onde

$$V_+ = V_- = +\infty, \quad V_0 = 0$$

L'energia meccanica del punto materiale è

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x), \tag{3}$$

ed è costante.

Proposizione 2 *L'energia meccanica (3) non è mai inferiore a V_0.*

Dimostrazione. Sia $\xi_0 \in \mathbb{R}$ tale che $V_0 = V(\xi_0)$. Segue

$$E = T + V = \text{costante} = T + V_0$$

L'asserto segue osservando che l'energia cinetica T è non negativa, per cui

$$E = T + V_0 \geq V_0 \tag{4}$$

■

Nella (4) l'uguaglianza si verifica se e solo se il punto materiale è in quiete in x_0. Infatti:

$$E = V_0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 0 \Longleftrightarrow v = 0$$

Supponiamo ora che l'energia meccanica del punto materiale sia $E_1 > V_0$ (fig. 1).

[1] È facile convincersi che una forza posizionale unidimensionale è necessariamente conservativa. Intuitivamente, ciò è dovuto al fatto che il lavoro eseguito dipende solo dagli estremi della traiettoria, giacché quest'ultima è un segmento di retta o un arco di curva (se il moto non è rettilineo). La dipendenza dal percorso si presenta per spazi con dimensione > 1.

Osservazione 3 *Attenzione, non significa che stiamo violando il principio di conservazione dell'energia meccanica. Semplicemente, assumiamo E come parametro libero per studiare il moto unidimensionale.*

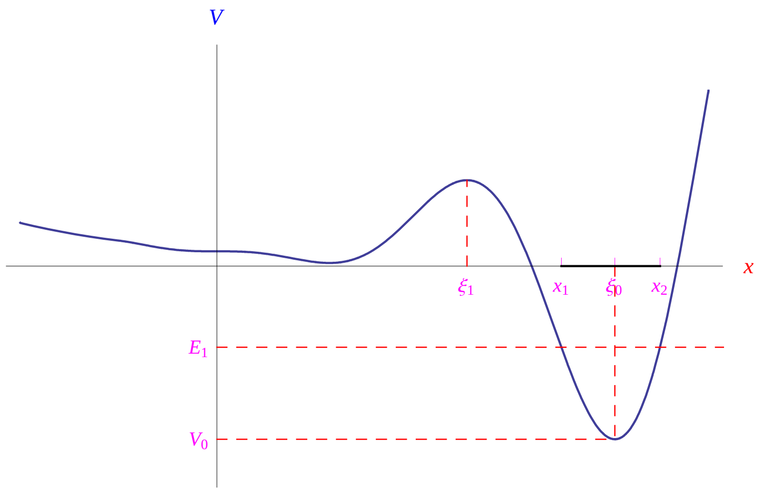

Figura 1: Andamento della funzione $V(x)$.

Deve essere

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E_1,$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E_1 - V(x)\right]}$$

Dal momento che $v \in \mathbb{R}$

$$E_1 - V(x) \geq 0 \tag{5}$$

cioè il moto è possibile solo nel sottoinsieme di $\mathbb{R}$ definito dalla disequazione (5).

Definizione 4 *Per un qualunque $E \geq V_0$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$*

$$\Lambda(E) = \{x \in \mathbb{R} \mid E - V(x) \geq 0\} \tag{6}$$

si chiama **regione classicamente accessibile***.*

In altri termini, risolvendo la (5) otteniamo la regione classicamente accessibile per quella data E_1. Per l'energia potenziale graficata in fig. 1, si ha

$$\Lambda(E_1) = [x_1, x_2]$$

ai cui estremi $x_{1,2}$ l'energia cinetica è nulla, per cui è ivi $v = 0$. Si noti che tali punti non sono di equilibrio giacché la forza è

$$F(x_1) = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_1} > 0, \quad F(x_2) = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x_2} < 0$$

e tende a riportare il punto materiale verso la posizione di ascissa ξ_0. Sviluppando $V(x)$ in serie di Taylor in un intorno di ξ_0:

$$V(x) = V(\xi_0) + \frac{V'(\xi_0)}{1!}(x - \xi_0) + \frac{V'(\xi_0)^2}{2!}(x - \xi_0)^2 + \ldots \tag{7}$$

e troncando lo sviluppo al secondo ordine

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2} k (x - \xi_0)^2, \tag{8}$$

dove $k = 2V''(\xi_0) > 0$ giacché in un intorno di ξ_0 il grafico di $V(x)$ volge la concavità verso l'alto. Ricordando che l'energia potenziale è definita a meno di una inessenziale costante additiva, si ha che la (8) è l'energia potenziale di un oscillatore armonico centrato in ξ_0 e di costante elastica $2V''(\xi_0)$. In altri termini, nel limite delle piccole oscillazioni il moto del punto materiale è quello di un oscillatore armonico. Dal momento che tale comportamento si presenta in molti sistemi fisici, si deduce l'importanza (non solo didattica) dell'oscillatore armonico. All'aumentare dell'ampiezza delle oscillazioni, al secondo membro della (7) non sono più trascurabili i termini di ordine superiore al secondo, per cui le oscillazioni sono anarmoniche. Tuttavia, l'aspetto fisicamente interessante è la stabilità dell'equilibrio esibita dal punto di ascissa ξ_0. È facile convincersi che tale proprietà si conserva per un qualunque punto di minimo relativo. Il punto di ascissa ξ_1 (fig. 1) non è un punto di equilibrio stabile, poiché per uno spostamento comunque piccolo da tale posizione, la forza allontana definitivamente la particella da tale posizione.

Definizione 5 *I punti di minimo relativo (o assoluto) della funzione $V(x)$ si dicono* **punti di equilibrio stabile**. *I punti di massimo relativo (o assoluto) della funzione $V(x)$ si dicono* **punti di equilibrio instabile**.

Concludiamo osservando che la regione classicamente accessibile è illimitata (superiormente o inferiormente) nei casi in cui l'energia potenziale non è divergente all'infinito. Ad esempio, se $V_+ < +\infty$, si ha che per ogni valore dell'energia $E > V_+$, il punto materiale si allontana a $+\infty$. Per avere un moto oscillante, deve necessariamente essere $V_\pm = +\infty$. In tal caso il punto materiale rimane confinato in una regione limitata.

Riferimenti bibliografici

[1] Sette D., 1968. *Lezioni di Fisica. Volume I.* Veschi