Moti periodici unidimensionali

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Teorema 1 *Il moto tra due punti di inversione consecutivi $\xi_1 < \xi_2$, è periodico di periodo*

$$T = 2\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{1}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, spponiamo che la regione accessibile sia $\Lambda = [\xi_1, \xi_2]$ (escludiamo, cioè, altri zeri semplici). Osserviamo preliminarmente che la funzione $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ è sommabile in Λ. Se ξ_1 è la posizione iniziale della particella, il moto è progressivo per cui l'equazione differenziale da prendere in considerazione è

$$\dot{x} = \sqrt{f(x)}$$

L'istante di arrivo in ξ_2 è perciò

$$t(\xi_2) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{2}$$

Qui la particella inverte il moto, per cui l'equazione differenziale del moto è

$$\dot{x} = -\sqrt{f(x)}$$

Ne segue che per giungere nuovamente in ξ_1, passerà un intervallo di tempo

$$-\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \tag{3}$$

Confrontando i due integrali (2)-(3) vediamo che il tempo impiegato per andare da ξ_1 a ξ_2 è pari al tempo impiegato per andare da ξ_2 a ξ_1. In quest'ultimo punto il moto si inverte ripetendosi con le modalità precedenti. Ne consegue che il moto è periodico con periodo (1).
■