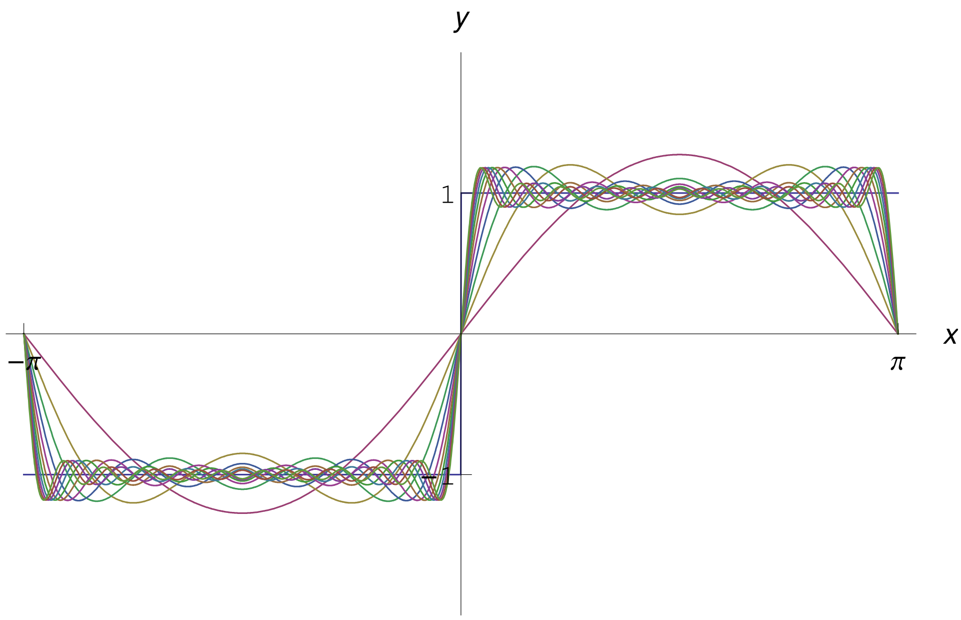
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Monografia xxx – 2015

MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO

Le coordinate di Fourier

Marcello Colozzo



Sommario

Dimostriamo una proprietà notevole dei coefficienti o *coordinate* di Fourier di una funzione $f \in C([-\pi, \pi])$.

Assegnata una funzione $f \in C([-\pi, \pi])$, i coefficienti di Fourier di f

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

compongono il polinomio trigonometrico di grado[1] $2n + 1$:

$$\tau_{2n+1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

È chiaro che assegnata $f \in C([-\pi, \pi])$ è univocamente determinata la $(2n + 1)$-*pla*

$$(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n+1} \tag{2}$$

i cui elementi sono i coefficienti o *coordinate* di Fourier della funzione assegnata. È vero anche il viceversa: la $(2n + 1)$-*pla* (2) individua univocamente la funzione $f \in C([-\pi, \pi])$. Per dimostrare tale proprietà occorre e basta dimostrare il teorema seguente:

Teorema 1 ***Hp***. *Sia* $f \in C([-\pi, \pi])$ *tale che:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, & (k = 0, 1, 2, ..., n) \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0, & (k = 0, 1, 2, ..., n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Th. $f(x)$ *è identicamente nulla in* $[-\pi, \pi]$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo:

$$\exists x_0 \in [-\pi, \pi] \mid f(x_0) > 0 \underset{f \text{ è continua in } [-\pi,\pi]}{\Longrightarrow} \exists I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [-\pi, \pi] \mid f(x) > 0, \ \forall x \in I_\delta(x_0)$$

Definiamo la funzione:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \cos\left[x - \frac{x_0 - \delta + (x_0 + \delta)}{2}\right] - \cos\left[\frac{x_0 - \delta - (x_0 + \delta)}{2}\right] \\ &= 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta \end{aligned} \tag{4}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} g(x) > 1 &\Longleftrightarrow \cos(x - x_0) > \cos\delta \Longleftrightarrow x \in I_\delta(x_0) \\ |g(x)| \leq 1 &\Longleftrightarrow x \notin I_\delta(x_0) \end{aligned} \tag{5}$$

Ciò implica:

$$\forall \varepsilon \in (0, \delta), \ \exists \lambda_\varepsilon > 0 \mid g(x) \geq 1 + \lambda_\varepsilon, \quad \forall x \in J_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I_\delta(x_0) \tag{6}$$

Inoltre, per ogni intero naturale n, la funzione $[g(x)]^n$ è un polinomio trigonometrico di grado $2n+1$. Posto:

$$I_n \stackrel{def}{=} \int_{-\pi}^{\pi} [g(x)]^n f(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

[1] Alcuni Autori utilizzano la locuzione *polinomio trigonometrico di ordine n*.

otteniamo una successione reale $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ma per le (3) è:

$$I_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Cioè $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione identicamente nulla. D'altra parte, I_n si decompone nella somma di 3 termini:

$$I_n = I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)},$$

dove:

$$I_n^{(1)} = \int_{-\pi}^{x_0-\delta} [g(x)]^n f(x)\, dx$$

$$I_n^{(2)} = \int_{x_0+\delta}^{\pi} [g(x)]^n f(x)\, dx$$

$$I_n^{(3)} = \int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} [g(x)]^n f(x)\, dx$$

Posto $M = \max_{[-\pi,\pi]} |f|$, per il teorema della media si ha:

$$\left|I_n^{(1)}\right| \leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |[g(x)]^n|\, |f(x)|\, dx \leq M \int_{-\pi}^{x_0-\delta} \underbrace{|[g(x)]^n|}_{\leq 1} dx \leq M(x_0 - \delta + \pi), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allo stesso modo $\left|I_n^{(2)}\right| \leq M(\pi - x_0 - \delta)$. Ne consegue che le successioni $\left\{I_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\left\{I_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \left|I_n^{(k)}\right| < +\infty, \quad (k = 1, 2)$$

Studiamo il comportamento di $I_n^{(3)}$ per $n \to +\infty$. Tenendo conto della (6):

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [g(x)]^n f(x)\, dx > \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [g(x)]^n f(x)\, dx \tag{8}$$

Applicando il teorema della media al secondo membro della (8), $(g(x)^n > 0)$:

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [g(x)]^n f(x)\, dx \geq m \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [g(x)]^n\, dx,$$

essendo $m = \min_{[-\pi,\pi]} f$. Ma per la (6):

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [g(x)]^n\, dx \geq 2\varepsilon(1 + \lambda_\varepsilon)^n,$$

per cui la (8) diventa:

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [g(x)]^n f(x)\, dx > \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} [g(x)]^n f(x)\, dx \geq 2\varepsilon(1 + \lambda_\varepsilon)^n$$

cioè:

$$I_n^{(3)} > 2\varepsilon \left(1 + \lambda_\varepsilon\right)^n , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ciò implica:

$$\lim_{n \to +\infty} I_n^{(3)} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} I_n = +\infty,$$

che è assurdo, giacchè $\{I_n\}$ è la successione identicamente nulla. $\blacksquare$