

SCIENTIA – <http://www.scientiajournal.org>

International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119

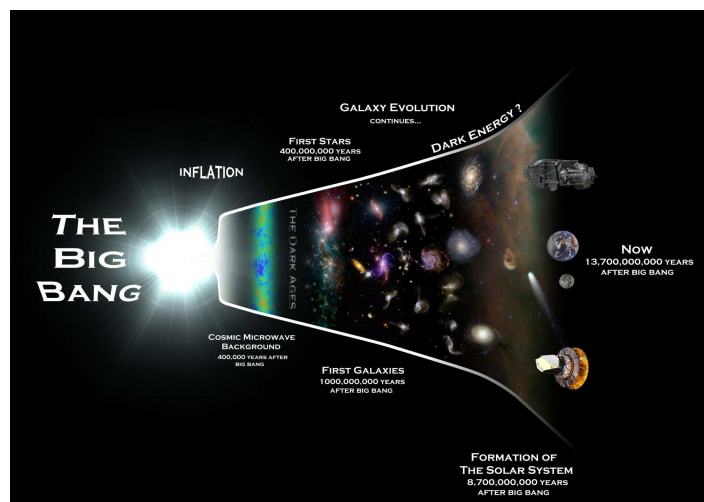
Monografia 005 – doi:10.12969/Scientia.Mon001 - December 31th, 2014



Modelli cosmologici di Friedmann

Marcello Colozzo

Istituto Scientia – <http://www.istitutoscientia.it> – via Ortola 65, 54100 Massa, Italy



Sommario

Ricaviamo le equazioni di Friedmann e i relativi modelli.

Keywords: equazioni di Friedmann, modelli di Friedmann

1 Modelli di Friedmann

1.1 Equazioni di Friedmann

Ci proponiamo di studiare le proprietà fisiche del “modello standard dell’universo”. Con tale termine si intende il modello di universo soluzione delle *equazioni di Friedmann*, la cui evoluzione dinamica genera le protostrutture (galassie e ammassi di galassie) che oggi osserviamo.

Ricordiamo che le equazioni di Friedmann derivano dalle equazioni di Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

richiedendo che la metrica sia quella di Robertson-Walker:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è scritto nelle coordinate $x^\alpha = (x^0, x^k)$ dove le $x^k = (r, \theta, \varphi)$ compongono un sistema di coordinate in co-moving, essendo r la coordinata radiale resa adimensionale e (θ, φ) gli usuali angoli polare e azimutale delle coordinate sferiche nello spazio tridimensionale. Il coefficiente k è il parametro di curvatura che può assumere i valori $1, 0, -1$, in corrispondenza dei quali, lo spazio tridimensionale è sferico, piatto e iperbolico rispettivamente. La funzione $a(t)$ è il fattore di espansione [1]. Il corrispondente intervallo spazio-temporale è dato da:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

A questo punto si calcolano a partire dalle $g_{\mu\nu}$, attraverso le formule di Calcolo Tensoriale, i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, le componenti del tensore di Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ e quindi il tensore di Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^\alpha{}_\alpha$ e lo scalare di curvatura $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Ricordiamo che il tensore di Ricci si ottiene per contrazione dal tensore di Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^\alpha{}_\alpha \text{ con } R_{\beta\mu\nu}^\alpha = -\Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu,\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha$$

I simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ sono legati al tensore metrico dalla relazione:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$$

Il tensore metrico inverso è la matrice:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2(t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Utilizzando un C.A.S. (computer algebra system) in grado di gestire il Calcolo Tensoriale, otteniamo i seguenti risultati per ciò che riguarda il tensore di Riemann, il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura. Precisamente, le componenti non nulle del tensore di Riemann (in unità $c = 1$) sono:

$$\begin{aligned} R_{0202} &= r^2 a(t) \ddot{a}(t) \\ R_{1212} &= -\frac{r^2 a^2(t) [\dot{a}^2(t) + kc^2]}{1 - kr^2} \\ R_{0303} &= r^2 a(t) \ddot{a}(t) \sin^2 \theta \\ R_{2323} &= -a^2(t) \dot{a}^2(t) r^4 \sin^2 \theta - a^2(t) kr^4 \sin^2 \theta \\ R_{1313} &= -\frac{r^2 a^2(t) \sin^2 \theta [\dot{a}^2(t) + kc^2]}{1 - kr^2} \\ R_{0101} &= -\frac{a(t) \ddot{a}(t)}{1 - kr^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Le componenti non nulle del tensore di Ricci (in unità fisiche) sono:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \\ R_{11} &= -\frac{1}{c^2} \frac{a(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2kc^2}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= -\frac{r^2}{c^2} [a(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2kc^2] \\ R_{33} &= -\frac{r^2}{c^2} \sin^2 \theta [a(t) \ddot{a}(t) + 2\dot{a}^2(t) + 2kc^2] \end{aligned} \quad (4)$$

Lo scalare di Ricci è:

$$R = \frac{6}{c^2} \frac{a(t) \ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + kc^2}{a^2(t)} \quad (5)$$

Nelle (1) $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso della materia che riempie l'universo. In cosmologia la materia è fenomenologicamente rappresentata da un fluido perfetto, poichè a larga scala gli effetti dissipativi sono trascurabili. Come è noto, il tensore energia-impulso di un fluido perfetto è:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (6)$$

Le grandezze ρ e P sono la densità e la pressione del fluido e u^μ è la 4-velocità della generica particella del fluido. Esplicitiamo le componenti covarianti di tale tensore. Nel sistema di coordinate in co-moving, la 4-velocità dell'elemento di fluido è: $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Le componenti covarianti di tale vettore sono $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta = (1, 0, 0, 0)$. Troviamo:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pr^2 a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Pr^2 a^2(t) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

A questo punto non dobbiamo fare altro che immettere tutte le grandezze trovate nelle equazioni tensoriali. Precisamente, la componente 00:

$$\dot{a}^2(t) + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2(t) \quad (8)$$

La componente 11:

$$2a(t) \ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + kc^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} a^2(t) P \quad (9)$$

Le rimanenti componenti spazio-spazio, riproducono la medesima equazione, mentre le componenti spazio-tempo danno luogo all'identità $0 = 0$. Le equazioni trovate si riassumono nel sistema:

$$\begin{cases} \dot{a}^2(t) + kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2(t) \\ 2a(t) \ddot{a}(t) + \dot{a}^2(t) + kc^2 = -\frac{8\pi G}{c^2} a^2(t) P \end{cases}$$

Ricavando la $\dot{a}^2(t)$ dalla prima e sostituendola nella seconda, otteniamo:

$$\ddot{a}(t) = -\frac{4\pi G}{3} a(t) \left(\rho + \frac{3}{c^2} P \right)$$

Abbiamo finalmente ottenuto le equazioni cosmologiche di Friedmann:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3}{c^2} P \right) \\ \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - kc^2 \end{cases} \quad (10)$$

Le grandezze ρ e P non sono indipendenti, ma legate da un'equazione di stato del tipo $P = P(\rho)$. Questa equazione può essere resa parametrica, cioè messa nella forma:

$$P = w\rho c^2, \quad (11)$$

essendo w un parametro adimensionale (*indice politropico*). I valori fisicamente significativi di esso sono: $w = 0; 1/3$. Infatti, nel primo caso abbiamo l'equazione di stato

$P = 0$, che caratterizza la cosiddetta “materia incoerente”, oppure un gas perfetto di particelle non relativistiche (fortemente diluito). Tale è la distribuzione, a larga scala, della materia nell’universo attuale. A $w = 1/3$ corrisponde l’equazione di stato di un gas di fotoni o di un gas di particelle ultrarelativistiche. Ciò approssima l’universo in epoche primordiali, poiché in tali epoche la temperatura è tale da innescare la transizione al regime ultrarelativistico, per ciò che riguarda il comportamento cinetico delle particelle del fluido. Stiamo trascurando gli effetti dissipativi, quindi da un punto di vista termodinamico l’espansione del fluido cosmologico è isoentropica, cioè conserva l’entropia.

$$dU = TdS - PdV = -PdV$$

L’energia interna del fluido è, a meno di un fattore moltiplicativo, $U = \rho c^2 a^3$. Tenendo conto della (2.5), l’equazione precedente diventa:

$$d(\rho c^2 a^3) = -w \rho c^2 da^3 \quad (12)$$

La (12) si integra immediatamente. A tale scopo poniamo $a^3 = y$

$$d(\rho c^2 y) = -w \rho c^2 dy$$

Da cui:

$$\varrho a^{3(1+w)} = \text{const} \quad (13)$$

Questa soluzione può essere scritta come:

$$\varrho(t) a(t)^{3(1+w)} = \varrho_0 a_0^{3(1+w)} \quad (14)$$

Dove $\varrho_0 = \varrho(t_0)$ e $a_0 = a(t_0)$, essendo t_0 l’epoca attuale. Quindi, l’evoluzione termodinamica del fluido cosmologico conserva la grandezza $\varrho(t) a(t)^{3(1+w)}$. La (14) si specializza nei due casi $w = 0$ (densità della materia) e $w = 1/3$ (densità della radiazione):

$$\begin{aligned} w = 0 &\implies \varrho_m(t) a^3(t) = \varrho_{0m} a_0^3 \\ w = \frac{1}{3} &\implies \varrho_\gamma(t) a^4(t) = \varrho_{0\gamma} a_0^4 \end{aligned} \quad (15)$$

Al posto della variabile tempo, possiamo utilizzare il red shift z che in cosmologia è una “variabile naturale”. Nella metrica di Robertson-Walker il red shift è dato dall’equazione [1]:

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \quad (16)$$

Ciò ci permette di esprimere ρ in funzione del red shift:

$$\varrho(z) = \varrho_0 (1+z)^{3(1+w)} \quad (17)$$

Quindi le (15) in funzione del red shift diventano:

$$\begin{aligned} \varrho_m(z) &= \varrho_{0m} (1+z)^3 \\ \varrho_\gamma(z) &= \varrho_{0\gamma} (1+z)^4 \end{aligned} \quad (18)$$

Riscriviamo la seconda equazione di Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - kc^2 \quad (19)$$

È conveniente esprimere tale equazione in termini del *parametro di chiusura* anziché del parametro di curvatura k . A tale scopo scriviamo:

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} H^2(t) \left[\frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho(t) - 1 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Essendo

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (21)$$

la *costante di Hubble* (in realtà è una funzione del tempo) che, come è noto, lega la velocità di recessione delle galassie alla loro distanza attraverso l'equazione $v = Hd$. Possiamo definire una grandezza adimensionale e non negativa $\Omega(t)$ che è appunto il parametro di chiusura (chiamato anche *parametro di densità*):

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho(t), \quad (22)$$

per cui la (20) diventa:

$$k = \frac{\dot{a}^2(t)}{c^2} [\Omega(t) - 1] \quad (23)$$

Da ciò segue:

$$\Omega = 1 \implies k = 0 \quad (\text{universo piatto}) \quad (24)$$

$$\Omega > 1 \implies k > 0 \quad (\text{universo chiuso})$$

$$\Omega < 1 \implies k < 0 \quad (\text{universo aperto})$$

Cioè:

$$k = \text{sign}(\Omega(t) - 1) \quad (25)$$

Queste relazioni ci permettono di esprimere il parametro di chiusura attraverso la derivata del parametro di espansione:

$$k = \pm 1 \implies \Omega(t) = 1 \pm \frac{c^2}{\dot{a}(t)} \quad (26)$$

La (22) può essere riscritta come:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)},$$

dove $\rho_{cr}(t) \equiv 3H^2(t)/(8\pi G)$ è la *densità critica*, con ovvio significato del termine. Osserviamo che i termini universo piatto, chiuso e aperto si riferiscono allo spazio tridimensionale e non allo spazio-tempo. Ad esempio, possiamo avere uno spazio-tempo curvo che in un istante dato ammette uno spazio tridimensionale piatto.

Per una questione di comodità matematica, riscriviamo la seconda equazione di Friedmann in termini del parametro di chiusura, anzichè del parametro di curvatura. A tale scopo, osservando che k è indipendente da t , deve essere:

$$k = \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2} (\Omega_0 - 1) \quad (27)$$

Sostituendo tale espressione di k nella seconda equazione di Friedmann, si trova:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + H_0^2 (1 - \Omega_0) \quad (28)$$

Ricordiamo che:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)},$$

quindi:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (29)$$

La (29) è la seconda equazione di Friedmann scritta in termini del parametro di chiusura. Integrando questa equazione differenziale si ottiene il parametro di espansione $a(t)$ della metrica di R-W e quindi l'evoluzione dinamica del nostro modello di universo. Prima di tentare un'integrazione di tale equazione (non lineare tranne in alcuni casi speciali), studiamo alcune proprietà generali della soluzione $a(t) \geq 0$. Dalla prima delle equazioni di Friedmann si evince che $\ddot{a}(t) < 0$, per ogni t , poichè è manifestamente $\rho + 3c^{-2}P > 0$. Perciò il grafico della funzione $a(t)$ volge la concavità verso il basso. Inoltre, sappiamo che l'universo è attualmente in espansione; ciò implica che la funzione $a(t)$ è localmente crescente in t_0 , essendo t_0 l'epoca attuale. Quindi risulta

$\dot{a}(t_0) > 0$. Da queste informazioni si deduce che la funzione non negativa $a(t)$ è monotonamente crescente nell'intervallo di tempo tale che $t \leq t_0$. Ciò implica l'esistenza di uno zero $-\infty < t_{in} < t_0$ di tale funzione. Fissiamo la scala dei tempi in modo da avere $t_{in} = 0$. Quindi deve essere $a(0) = 0$. Sappiamo che:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^{3(1+w)}$$

Perciò

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \rho(t) = +\infty, \quad (30)$$

poiché è $3(1+w) > 0$. Abbiamo perciò stabilito l'esistenza di un “istante iniziale” $t = 0$ in corrispondenza del quale il “raggio dell'universo” si annulla e la sua densità diverge. Quindi $t = 0$ è una *singolarità* (big-bang) per il nostro modello di universo. Incidentalmente osserviamo che in tutti i modelli fino ad ora esplorati e cioè con equazione di stato $P = w\rho c^2$ ($w \geq 0$) la fase di espansione dell'universo è decelerata, in quanto è $\ddot{a}(t) < 0$. Inoltre dalla stessa equazione di Friedmann si evince che a causa del segno negativo, la pressione ha un effetto di decelerazione sull'espansione del fluido cosmologico a differenza di ciò che succede in un fluido stellare.

1.2 Universi piatti

Abbiamo visto che il parametro di espansione si ottiene integrando l'equazione differenziale (29), che nel caso di un modello piatto ($\Omega_0 = 1$) diventa

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} \quad (31)$$

La soluzione è

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad (32)$$

Cioè un universo piatto si espande indefinitamente nel futuro con legge di potenza. Esprimendo il tempo t in funzione del red shift z :

$$t(z) = t_0 (1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} \quad (33)$$

Nella (33) t è l'istante di emissione di un segnale luminoso emesso da una sorgente, e che giunge a noi a t_0 con red shift z . In questo modo possiamo utilizzare il red shift come variabile naturale, tenendo conto che z è una funzione decrescente del tempo. La derivata dalla funzione $a(t)$ è:

$$\dot{a}(t) = n \frac{a(t)}{t}, \quad (34)$$

essendo $n = 2/[3(1+w)]$. Quindi, la costante di Hubble:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{2}{3(1+w)t} \\ &= H_0 \frac{t_0}{t} \end{aligned} \quad (35)$$

Inoltre, si definisce *parametro di decelerazione* la grandezza adimensionale:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \quad (36)$$

Questa grandezza può essere definita per un qualunque modello di Friedmann. Infatti, la funzione $a(t)$ può essere sviluppata in serie di Taylor intorno a t_0 .

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k a(t)}{dt^k} \right)_{t_0} (t-t_0)^k \\ &= a_0 + \dot{a}(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t-t_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

che può essere riscritta come:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a_0} (t-t_0)^2 + \dots \right], \quad t \in (t_0 - \delta t, t_0 + \delta t)$$

Risulta:

$$q(t_0) = -\frac{\ddot{a}(t_0)a_0}{\dot{a}^2(t_0)}$$

da cui:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + \dots \right], \quad t \in (t_0 - \delta t, t_0 + \delta t) \quad (37)$$

Per tutti i modelli di Friedmann è $q(t) > 0$, cioè l'espansione è decelerata (vedi § precedente). Ciò può essere visto nel caso particolare dei modelli piatti, attraverso l'equazione (34), in cui è $0 < n < 1$ nei casi fisicamente significativi, vale a dire per $w \geq 0$. Determiniamo il parametro di decelerazione per $\Omega_0 = 1$. Intanto osserviamo che la derivata seconda del parametro di espansione è:

$$\ddot{a}(t) = n(n-1) \frac{a(t)}{t^2},$$

da cui:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1+3w}{2} \end{aligned} \quad (38)$$

Cioè l'espansione degli universi piatti conserva il parametro di decelerazione. Vediamo con quale legge evolve la densità degli universi piatti. Abbiamo:

$$\rho(t) a_0^{3(1+w)} \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 = \rho_0 a_0^{3(1+w)}$$

Equivalente a:

$$\rho(t) t^2 = \rho_{0cr} t_0^2 ,$$

poichè $\rho_0 = \rho_{0cr}$. Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} \rho_{0cr} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \\ H_0 &= \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t_0^2} \end{aligned} \quad (39)$$

Abbiamo così ottenuto la legge che regola l'evoluzione temporale della densità di un universo piatto:

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G (1+w)^2 t^2} \quad (40)$$

Si conclude che nei modelli piatti la densità è proporzionale a t^{-2} . Le equazioni trovate si specializzano nei due casi fisicamente significativi: $w = 0$, e $w = 1/3$. Per $w = 0$ il parametro di espansione è dato da:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (41)$$

In fig. 1 riportiamo $\frac{a(t)}{a_0}$ in funzione della variabile adimensionale $\frac{t}{t_0}$. La costante di Hubble è:

$$H(t) = \frac{2}{3t} = H_0 (1+z)^{\frac{3}{2}} \quad (42)$$

La densità dell'universo evolve secondo la legge:

$$\rho_m(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (43)$$

Il pedice m ci ricorda che $w = 0$ implementa un universo a materia dominante. In maniera del tutto analoga possiamo ricavare le grandezze che descrivono l'evoluzione di un modello a radiazione dominante. Per il parametro di espansione troviamo l'espressione:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

In fig. 2 riportiamo $\frac{a(t)}{a_0}$ in funzione della variabile adimensionale $\frac{t}{t_0}$.

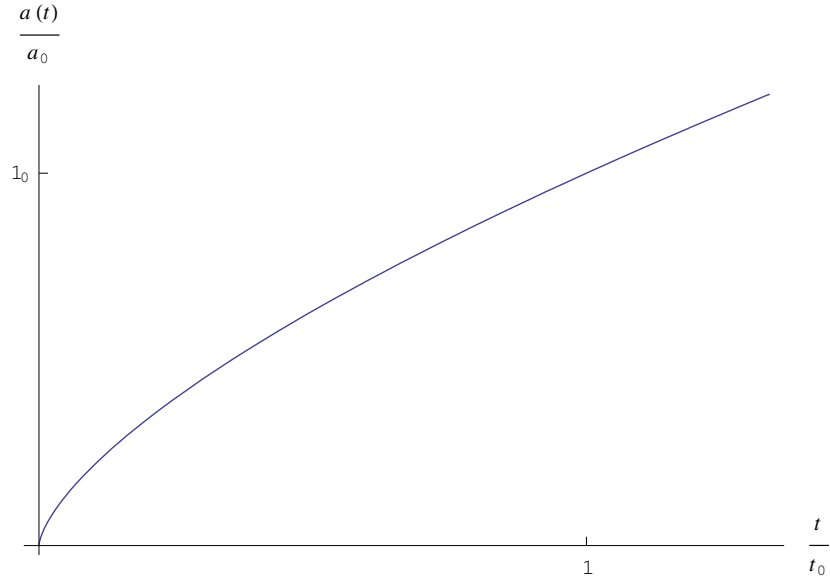


Figura 1: Andamento del parametro di espansione normalizzato su a_0 in funzione del tempo adimensionalizzato su t_0 , nel caso di un Universo piatto con $w = 0$.

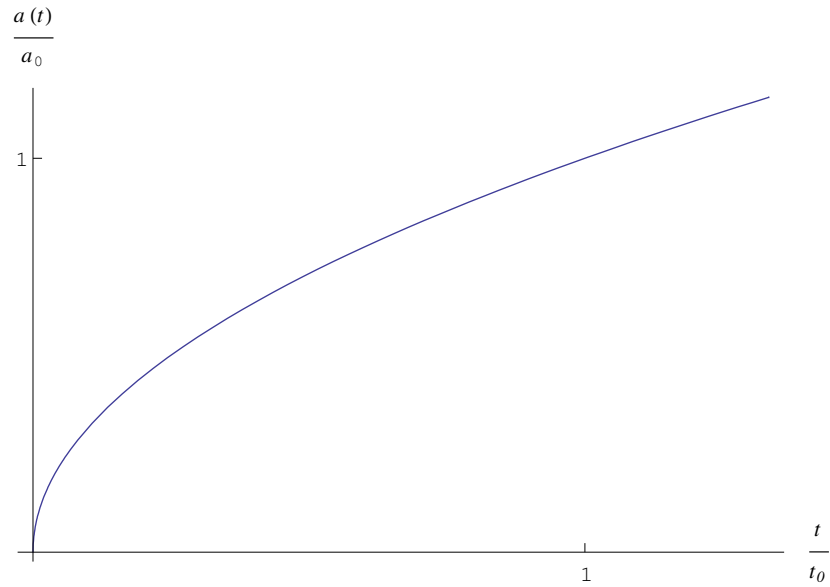


Figura 2: Andamento del parametro di espansione normalizzato su a_0 in funzione del tempo adimensionalizzato su t_0 , nel caso di un Universo piatto con $w = \frac{1}{3}$.

Il tempo di emissione di un segnale in funzione del red shift:

$$t(z) = t_0 (1+z)^{-2} \quad (45)$$

La costante di Hubble vale:

$$H(t) = \frac{1}{2t} \quad (46)$$

La densità dell'universo radiativo evolve secondo la legge:

$$\rho_\gamma(t) = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (47)$$

1.3 Universi curvi

L'equazione differenziale che determina l'evoluzione dinamica del parametro di espansione dei modelli curvi è la (29) con $\Omega_0 \neq 1$, che qui riscriviamo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (48)$$

Nell'intervallo di tempo tale che

$$\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{1+3w} \gg |1 - \Omega_0| \quad (49)$$

le soluzioni della (48) si comportano come quelle dell'equazione:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w}, \quad (50)$$

che, a parte la costante moltiplicativa Ω_0 , è la stessa che regola l'evoluzione dei modelli piatti. La condizione (49) è verificata per

$$\frac{a_0}{a(t)} \gg |\Omega_0^{-1} - 1|^{\frac{1}{1+3w}} \equiv \frac{a_0}{a(t_*)},$$

essendo t_* l'istante di tempo tale che:

$$a(t_*) = \frac{a_0}{|\Omega_0^{-1} - 1|^{\frac{1}{1+3w}}}$$

Quindi la (49) è verificata per $a(t) \ll a(t_*) \iff t \ll t_*$, giacché la funzione $a(t)$ è monotonamente crescente per $t < t_0$. Si conclude che per $t \rightarrow 0$, ogni modello curvo si comporta come un modello piatto. Ciò può essere visto studiando l'evoluzione del parametro di densità in funzione del red shift. Abbiamo:

$$\Omega(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_{cr}(z)} = \frac{\rho(z)}{3H^2(z)} 8\pi G \quad (51)$$

Scriviamo la costante di Hubble in funzione di z :

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (52)$$

Cioè:

$$H^2(z) = H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_0 (1+z)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right], \quad (53)$$

che ci permette di ricavare la funzione $\Omega(z)$:

$$\Omega(z) = \frac{8\pi G \rho_0 (1+z)^{3(1+w)}}{3H_0^2 (1+z)^2 \left[\Omega_0 (1+z)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right]} \quad (54)$$

Abbiamo così ottenuto il paramentro di densità in funzione del red shift:

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0 (1+z)^{1+3w}}{\Omega_0 (1+z)^{1+3w} + (1 - \Omega_0)} \quad (55)$$

Siamo interessati al comportamento del parametro di densità per $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Omega(t) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \Omega(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 + \frac{(1-\Omega_0)}{(1+z)^{1+3w}}} = 1$$

Questo risultato conferma l'asserzione precedente, e cioè che in un intorno di $t = 0$ ogni modello curvo si comporta come un modello piatto.

I modelli curvi a loro volta si dividono in modelli aperti ($\Omega_0 < 1$) e modelli chiusi ($\Omega_0 > 1$). Studiamo separatamente i due casi.

a. Universi aperti.

Scriviamo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \right] \quad (56)$$

con $1 - \Omega_0 > 0$. Risulta

$$\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^{1+3w} + (1 - \Omega_0) \neq 0 \quad \text{per ogni } t,$$

quindi è $\dot{a} \neq 0$. Inoltre sappiamo che $\dot{a}(t_0) > 0$, ed essendo $a(t)$ continua e dotata di derivata continua, dovrà necessariamente essere $\dot{a}(t) > 0, \forall t \in (0, +\infty)$. Cioè

un universo aperto si espande indefinitamente. Per $t \gg t_*$, le soluzioni della (56) si comportano come quelle dell'equazione:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 (1 - \Omega_0), \quad (57)$$

che ci dà immediatamente la soluzione: $a(t) = A \cdot t$, con $A = \text{const.}$ Si conclude quindi che l'espansione di un qualunque universo aperto a tempi lunghi è lineare in t . L'equazione (56) può essere scritta come:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \frac{1}{R(t)^{1+3w}} + (1 - \Omega_0) \right], \quad (58)$$

dove:

$$R(t) \equiv \frac{a(t)}{a_0}, \quad (59)$$

è il parametro di espansione normalizzato. Evidentemente:

$$R(t_0) = 1$$

L'inversa della funzione $R(t)$ è:

$$t(R) = \frac{1}{H_0} \int_0^R \frac{dR'}{\left[\frac{\Omega_0}{(R')^{1+3w}} + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2}} \quad (60)$$

Quindi, l'istante attuale t_0 noto come *età dell'universo*, è:

$$\begin{aligned} t_0 &= t(1) \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dR'}{\left[\frac{\Omega_0}{(R')^{1+3w}} + (1 - \Omega_0) \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

Definiamo la seguente funzione:

$$g(R, \Omega_0, w) = \left[\frac{\Omega_0}{(R)^{1+3w}} + (1 - \Omega_0) \right]^{-1/2} \quad (61)$$

Quindi:

$$t(R, \Omega_0, w) = \frac{1}{H_0} \int_0^R g(R', \Omega_0, w) dR' \quad (62)$$

Per $w > -1/3$ l'integrale a secondo membro della (62) si esprime attraverso la funzione gamma e la funzione ipergeometrica. Quest'ultima è:

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k b_k}{c_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (63)$$

ed è la soluzione dell'equazione ipergeometrica:

$$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0 \quad (64)$$

Inoltre, la ${}_2F(a, b, c)$ ha la seguente rappresentazione integrale:

$${}_2F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 y^{b-1} (1-y)^{c-b-1} (1-yz)^{-a} dy \quad (65)$$

Ciò premesso, la (62) si scrive:

$$t(R, \Omega_0, w) = \frac{{}_2F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{1+3w}, \frac{3w}{1+3w}; \frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}\right)}{H_0(1-\Omega_0)^{1/2}} \quad (66)$$

È istruttivo determinare l'età dell'universo $t_0 = t(R=1, \Omega_0, w)$ per diversi valori del parametro di densità, conoscendo il valore di H_0 , fornito dai dati sperimentali. Quest'ultimo è

$$H_0 \simeq 2.27 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (67)$$

Consideriamo il caso speciale di un'espansione a materia dominante ($w=0$). Le equazioni trovate si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dx} &= H_0 t_0 \left[\frac{\Omega_0}{R(x)} + (1-\Omega_0) \right]^{1/2} \\ H_0 t_0 &= \int_0^1 \frac{dy}{[\Omega_0 y^{-1} + (1-\Omega_0)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (68)$$

È interessante studiare l'andamento del parametro di decelerazione per questo modello di universo:

$$q(x) = -\frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2} \quad (69)$$

Dove l'apice indica l'operazione di derivazione rispetto alla variabile x . Calcolando il limite per $x \rightarrow 0$, si trova:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = \frac{1}{2}$$

Come c'era da aspettarsi, poiché in un intorno di $t=0$ è $\Omega \rightarrow 1$. Nel limite opposto il parametro di decelerazione è infinitesimo, in forza dell'espansione lineare. Scriviamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0$$

b. Universi chiusi

In questo caso conviene riscrivere l'equazione che regola l'evoluzione dinamica di $a(t)$ come:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{1+3w} - (\Omega_0 - 1) \right] \quad (70)$$

con $(\Omega_0 - 1) > 0$. È facile verificare che la derivata prima di $a(t)$ ha uno zero al finito. Poniamo:

$$g(t) \equiv \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^{1+3w} - (\Omega_0 - 1)$$

Quindi:

$$\dot{a}(t) = \pm H_0 a_0 \sqrt{|g(t)|} \quad (71)$$

Evidentemente gli zeri della $\dot{a}(t)$ sono gli zeri della $g(t)$. Quindi:

$$g(t) = 0 \iff a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}\right)^{\frac{1}{1+3w}} \stackrel{def}{=} a(t_m)$$

Cioè $\dot{a}(t) = 0 \iff t = t_m$. Perciò t_m è un punto di estremo relativo per la funzione $a(t)$. Più esattamente, si tratta di un punto di massimo relativo, giacché $a(t)$ è monotonamente crescente in $(0, t_0)$. Manifestamente esso è un punto di massimo assoluto per tale funzione. Ciò implica l'esistenza di uno zero al finito $t_f > t_m$, per la funzione $a(t)$. Tale istante individua la singolarità finale (big-crunch) nella quale l'universo collassa. La derivata prima del parametro d'espansione è

$$\dot{a}(t) = \begin{cases} +H_0 a_0 \sqrt{g(t)}, & \text{se } t \in (0, t_m) \\ -H_0 a_0 \sqrt{-g(t)}, & \text{se } t \in (t_m, t_f) \end{cases} \quad (72)$$

O, ciò che è lo stesso,

$$|\dot{a}(t)| = H_0 a_0 \sqrt{|g(t)|}, \quad t \in (0, t_f) \quad (73)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Colozzo M. 2015. La metrica di Robertson-Walker. Monografia di Scientia
- [2] Coles P. Lucchin F. 2002. Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure. Wiley.
- [3] Peebles P.J.E. 1993. Principles of Physical Cosmology.