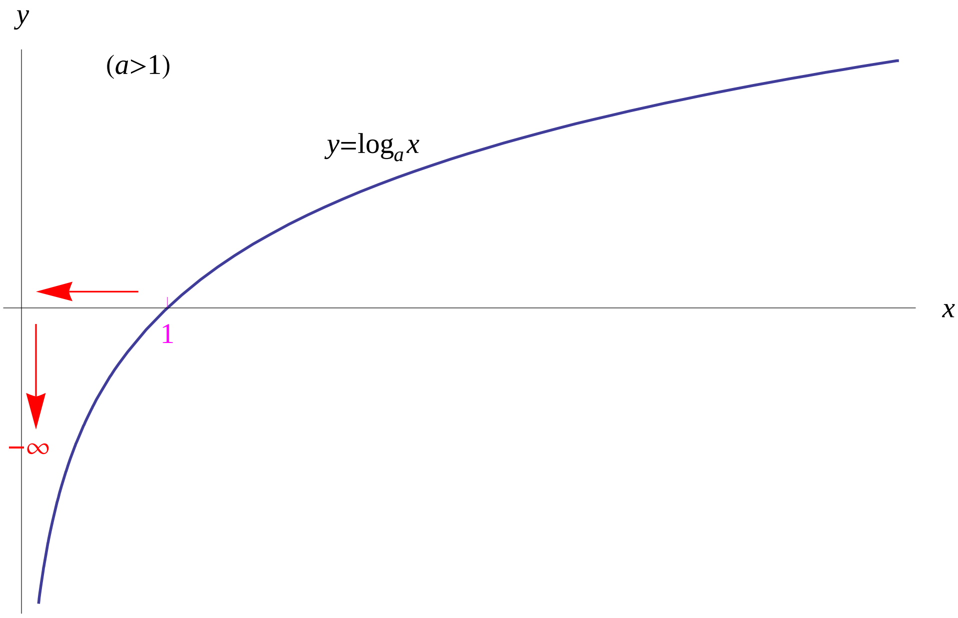
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right)$$

Limiti di alcune funzioni elementari (parte prima)

Marcello Colozzo



1 Limiti di alcune funzioni elementari

È facile mostrare che le funzioni elementari sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. Non ci resta quindi che studiare il comportamento di tali funzioni nei punti di accumulazione non appartenenti a tali insiemi.

1.1 Potenza di esponente reale

È la funzione:

$$f(x) = x^\alpha, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

È istruttivo distinguere i due casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.

1. $\alpha > 0$

   Osserviamo innanzitutto che

   $$\forall \alpha > 0, \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty \tag{1}$$

   Consideriamo poi α razionale: $\alpha \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \alpha = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$. Riguardo all'insieme di definizione di f, abbiamo i seguenti casi:

   $$n \text{ pari } \Longrightarrow f(x) = \sqrt[n]{x^m} \text{ è definita in } X = [0, +\infty)$$
   $$n \text{ dispari } \Longrightarrow f(x) = \sqrt[n]{x^m} \text{ è definita in } X = (-\infty, +\infty)$$

   Per n dispari, ridefiniamo l'esponente $\alpha = \frac{m}{2n-1}$, con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, cosicchè $f(x) = \sqrt[2n-1]{x^m}$. Il comportamento per $x \to -\infty$, si deduce dalla (1) sfruttando la parità della funzione. Precisamente:

   $$m \text{ pari } \Longrightarrow f \text{ è pari } \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = +\infty$$
   $$m \text{ dispari } \Longrightarrow f \text{ è dispari } \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = -\lim_{x \to +\infty} \sqrt[2n-1]{x^m} = -\infty$$

   Esempio 1 *Per $m = 3$, $n = 4$, abbiamo la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$, il cui grafico è riportato in fig.1. Risulta:*

   $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[4]{x^3} = +\infty, \lim_{x \to -\infty} \sqrt[4]{x^3} = -\infty$$

   Per $m = 3$, $n = 1$, abbiamo la funzione $f(x) = x^3$, il cui grafico è la parabola cubica, riportata in fig.2. Risulta:

   $$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

   Esempio 2 *Per $m = 2$, $n = 5$, abbiamo la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, il cui grafico è riportato in fig.3*

   Risulta:

   $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[5]{x^2} = +\infty, \lim_{x \to -\infty} \sqrt[5]{x^2} = +\infty$$

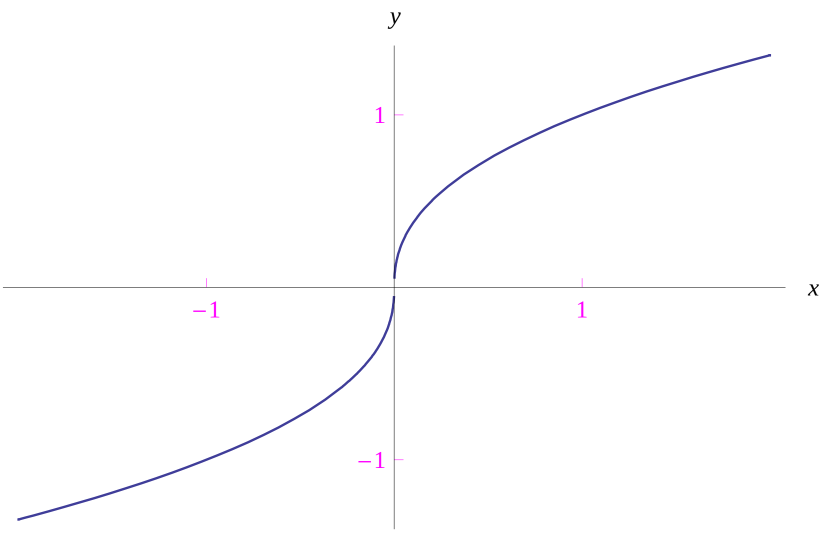


Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

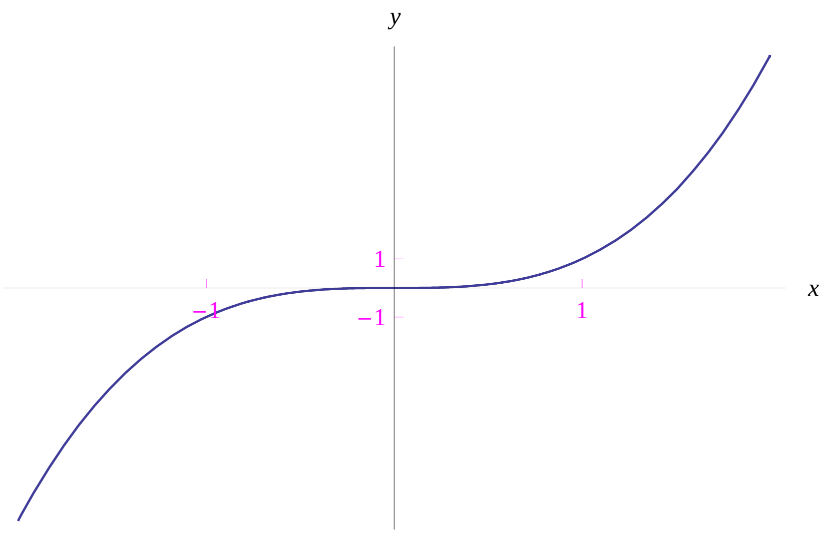


Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = x^3$.

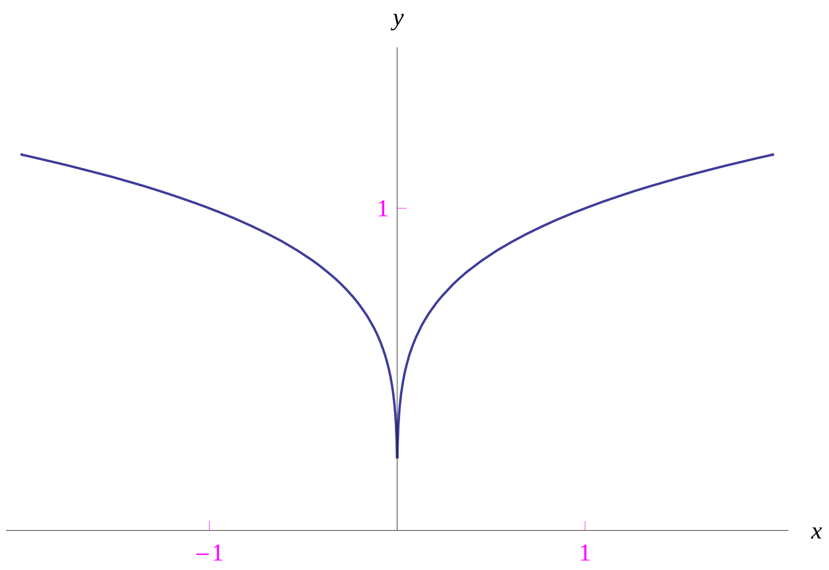


Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$.

2. $\alpha < 0$

Scriviamo:

$$f(x) = x^{-|\alpha|} = \frac{1}{|x|^{|\alpha|}} \tag{2}$$

Abbiamo i seguenti casi:

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \frac{m}{n},\ n \text{ dispari } \Longrightarrow X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \\ |\alpha| &= \frac{m}{n},\ n \text{ pari } \Longrightarrow X = (0, +\infty) \\ |\alpha| &\in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Longrightarrow X = (0, +\infty) \end{aligned} \tag{3}$$

Nel primo caso i punti di accumulazione non appartenenti a X sono $0, +\infty, -\infty$. Nei rimanenti due casi, invece, abbiamo i punti 0 e $+\infty$. In virtù della (2):

$$\forall \alpha \in (-\infty, 0), \quad \lim_{x \to +\infty} x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} x^{|\alpha|}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Consideriamo la prima delle (3), ridifinendo $|\alpha| = \frac{m}{2n-1}$:

$$x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{-\infty} = 0^-, & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \frac{1}{+\infty} = 0^+, & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-|\alpha|} = \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} x^{|\alpha|}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Osserviamo poi che per $|\alpha| = \frac{m}{n}$, con n dispari, possiamo calcolare $\lim_{x \to 0^-} x^{-|\alpha|}$, giacchè la funzione è definita anche per $x < 0$. Abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{0^-} = -\infty, & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \frac{1}{0^+} = +\infty, & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

Ricapitolando:

$$m \text{ dispari } \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = -\infty \end{cases},$$

cioè, per m dispari, $\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}}$ è non regolare in $x = 0$.

$$m \text{ pari } \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}} = +\infty,$$

cioè, per m pari, $\frac{1}{\sqrt[2n-1]{x^m}}$ è regolare in $x = 0$, risultando ivi divergente positivamente.

Esempio 3 *La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, il cui grafico è un'iperbole equilatera (fig. 4), rientra nel caso precedente. Precisamente è m,n dispari. Quindi la funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, avendosi:*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

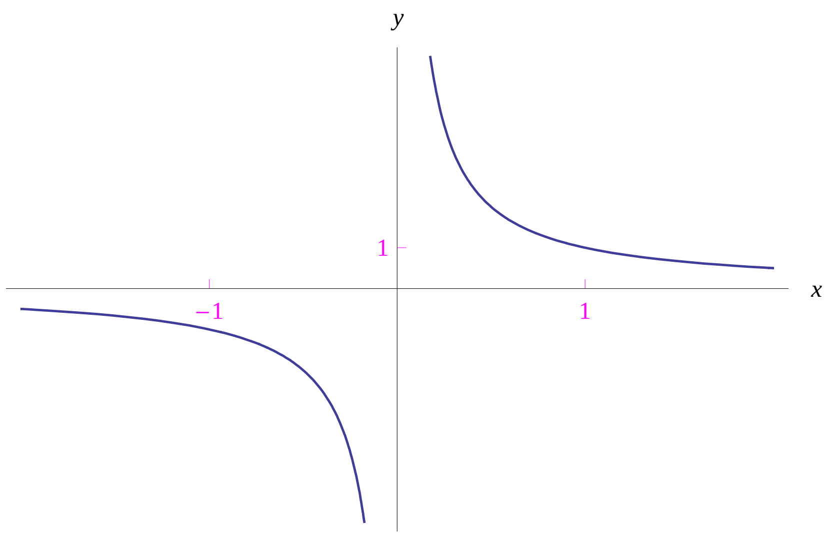


Figura 4: Grafico della funzione $\frac{1}{x}$.

Esempio 4 *La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}}$, il cui grafico è riportato in fig. 5, rientra nel caso precedente. Precisamente è m pari,n dispari. Quindi la funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, avendosi:*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} = 0^+, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} = 0^+$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[9]{x^4}} = +\infty$$

Di seguito riportiamo i grafici che riassumono i vari casi.

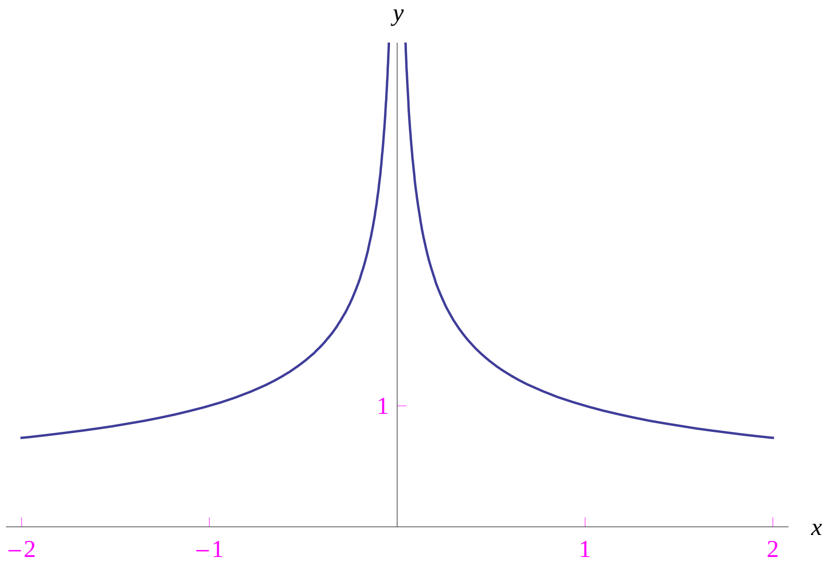


Figura 5: Grafico della funzione $\sqrt[9]{x^4}$.

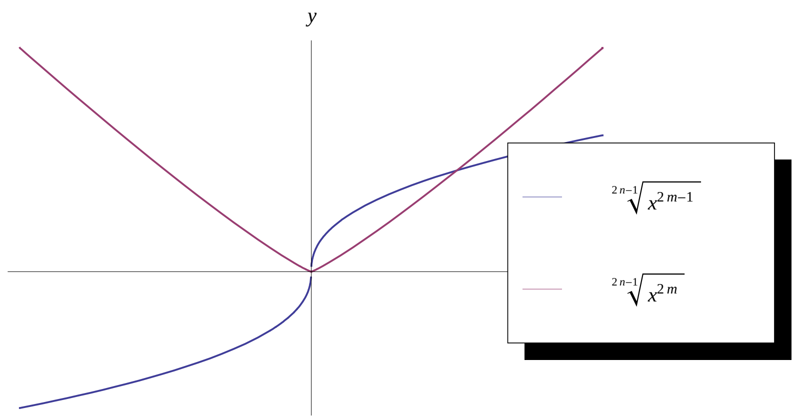


Figura 6: Nel diagramma cartesiano di $\sqrt[2n-1]{x^{2m}}$ stiamo considerando $2m > 2n - 1$.

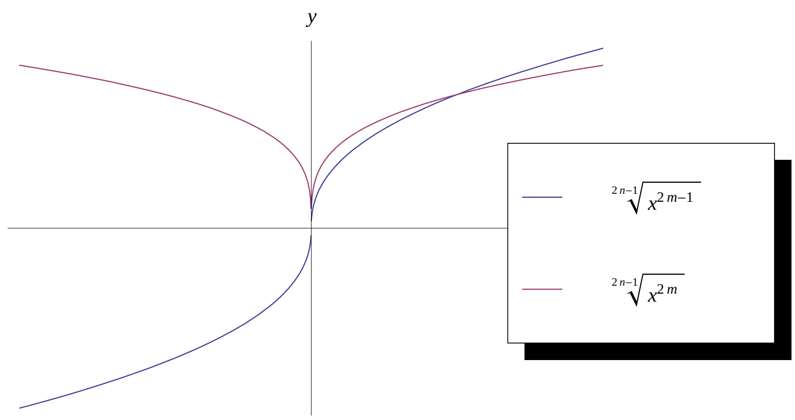
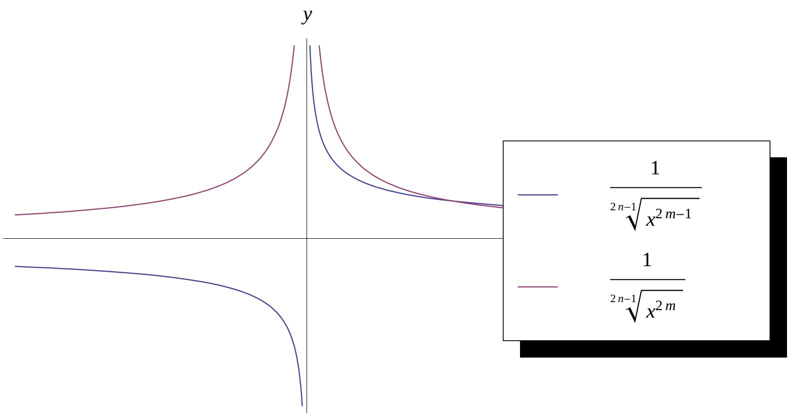


Figura 7: Nel diagramma cartesiano di $\sqrt[2n-1]{x^{2m}}$ stiamo considerando $2m < 2n - 1$.



1.2 Polinomi

Consideriamo il polinomio di grado $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ sul campo reale:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0) \tag{4}$$

Tale funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$, per cui calcoliamo i limiti per $x \to \pm\infty$. Agli estremi dell'insieme di definzione, il polinomio (4) si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Per rimuovere l'indeterminazione, applichiamo il seguente artificio:

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + ... + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f(x) \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} a_n x^n\right)\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + ... + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)\right] \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} a_n x^n\right)\left[\underbrace{\lim_{x\to+\infty} 1}_{=1} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x}\right)}_{=0} + ... + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}}\right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)}_{=0}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a_n \lim_{x\to+\infty} x^n = a_n \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty\,, \text{ se } a_n > 0 \\ -\infty\,, \text{ se } a_n < 0 \end{cases}$$

Procedendo allo stesso modo per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a_n \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} a_n \cdot (+\infty)\ , \text{ se } n \text{ è pari} \\ a_n \cdot (-\infty)\ , \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esempio 5 *Calcoliamo* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, *dove* $f(x) = -5x^4 + 3x^2 + \sqrt{2}x - 1$. *Abbiamo:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -(+\infty) + 3(+\infty) + (+\infty) = \infty - \infty$$

Applicando l'artificio (5):

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[-5x^4\left(1 - \frac{3}{5x^2} - \frac{\sqrt{2}}{5x^3} + \frac{1}{x^4}\right)\right] \\ &= -5\lim_{x\to+\infty} x^4 = -5(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -5 \lim_{x\to-\infty} x^4 = -5(+\infty) = -\infty$$

Esempio 6 *Calcoliamo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, dove $f(x) = 4x^5 - x^4 + 12x^3 + 2x^2 - x - 2$. Applicando l'artificio (5):*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[4x^5\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^5}\right)\right] \\
&= \left(\lim_{x\to+\infty} 4x^5\right)\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{2x^5}\right)\right] \\
&= (+\infty)\cdot(1+0) = +\infty
\end{aligned}$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(4x^5\right) = -\infty$$

1.3 Funzione esponenziale

Scriviamo:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{6}$$

La funzione (6) è definita in $(-\infty, +\infty)$ e risulta $\forall x,\ f(x) > 0$, per cui il codominio di f è $(0, +\infty)$. Ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
&a > 0 \Longrightarrow a^x \text{ è strettamente crescente} \\
&0 < a < 1 \Longrightarrow a^x \text{ è strettamente decrescente}
\end{aligned}$$

Il diagramma cartesiano della funzione esponenziale è riportato in fig. 8.

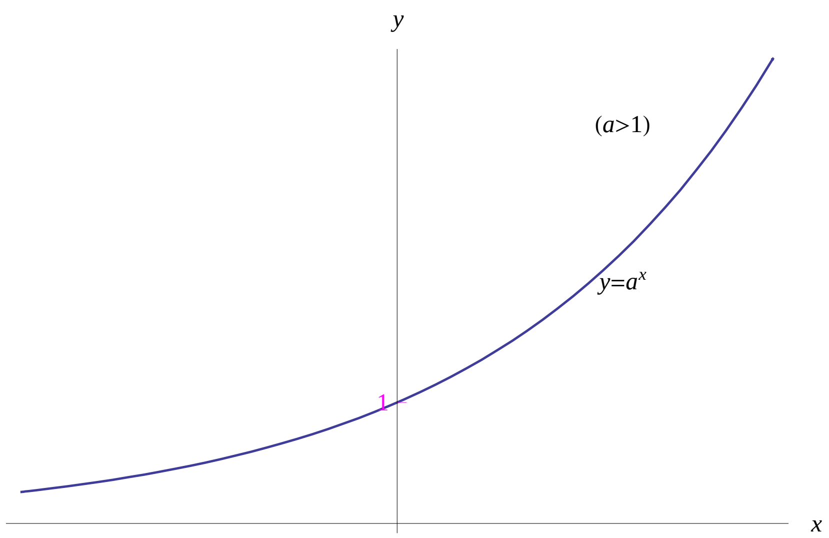


Figura 8: Diagramma cartesiano della funzione esponenziale.

Si deduce facilmente che:

$$a > 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+ \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+ \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$

Un caso speciale è $a = e$, essendo e la costante di Nepero.

1.4 Funzione logaritmo

Ricordiamo che tale funzione è l'inversa della funzione esponenziale a^x. Infatti, a^x è strettamente monòtona in $(-\infty, +\infty)$, onde è ivi invertibile. Per determinare l'inversa, utilizziamo il procedimento standard e cioè risolviamo la seguente equazione rispetto alla variabile x:

$$y = a^x \Longrightarrow x = \lg_a y$$

Qui y appartiene al codominio della funzione esponenziale, cioè $y \in (0, +\infty)$. Ridifinendo la variabile y nella variabile indipendente x, otteniamo l'espressione analitica della funzione logaritmo di base a:

$$f(x) = \lg_a x, \tag{7}$$

definita in $X = (0, +\infty)$. Il codominio di (7) è manifestamente $f(X) = (-\infty, +\infty)$. Dalla monotonia della funzione a^x, deduciamo la monotonia di $\lg_a x$:

$$\begin{aligned} &a > 0 \Longrightarrow \lg_a x \text{ è strettamente crescente} \\ &0 < a < 1 \Longrightarrow \lg_a x \text{ è strettamente decrescente} \end{aligned}$$

Il diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base a è riportato nelle figg. 9-10.

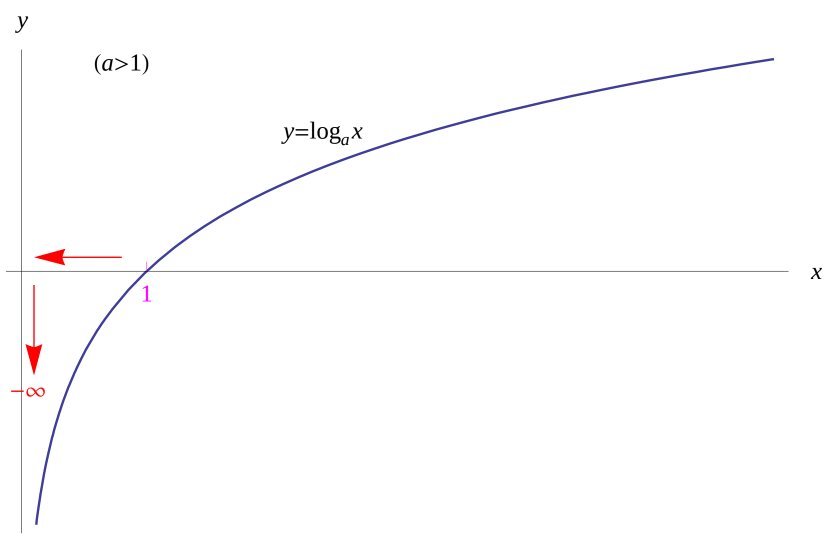


Figura 9: Diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base $a > 1$.

Si deduce facilmente che:

$$a > 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \lg_a x = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \lg_a x = +\infty \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \lg_a x = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} a^x = -\infty \end{cases}$$

Un caso speciale è $a = e$, essendo e la costante di Nepero. In tal caso si ottiene il logaritmo neperiano $\ln x$.

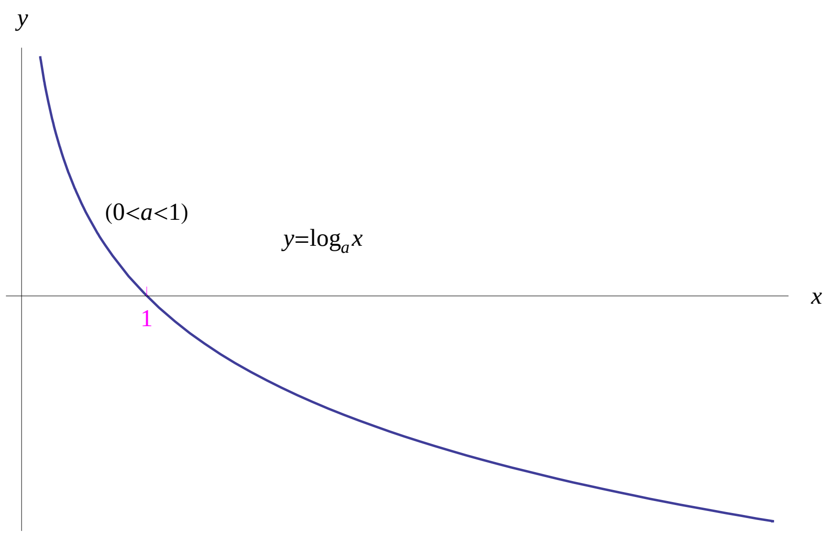


Figura 10: Diagramma cartesiano della funzione logaritmo di base $0 < a < 1$.

Osservazione 7 *Quando si esegue il calcolo di un limite di funzioni contenenti il logaritmo, si scrive rapidamente:*

$$\ln 0^+ = -\infty, \ \ln(+\infty) = +\infty$$

Esempio 8 *Calcoliamo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

dove $f(x) = \frac{a^{nx}}{b^{mx}}$ *con* $a, b > 0$ *e* $a \neq b$.

Prendiamo il logaritmo della funzione:

$$\ln f(x) = \ln \frac{a^{nx}}{b^{mx}} = x(n \ln a - m \ln b),$$

per cui:

$$f(x) = e^{x(n \ln a - m \ln b)}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{\lambda},$$

dove

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} x(n \ln a - m \ln b) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a^n > b^m \\ -\infty, & \text{se } a^n < b^m \end{cases}$$

Ne consegue:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a^n > b^m \\ 0^+, & \text{se } a^n < b^m \end{cases}$$

1.5 Funzioni iperboliche e iperboliche inverse

Ricordiamo che:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{8}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Le (8) sono definite in $(-\infty, +\infty)$. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - e^{-x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\lim_{x\to+\infty} \sinh x = -\infty$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\sinh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\sinh x$ è riportato in fig. 11. Passiamo a $\cosh x$:

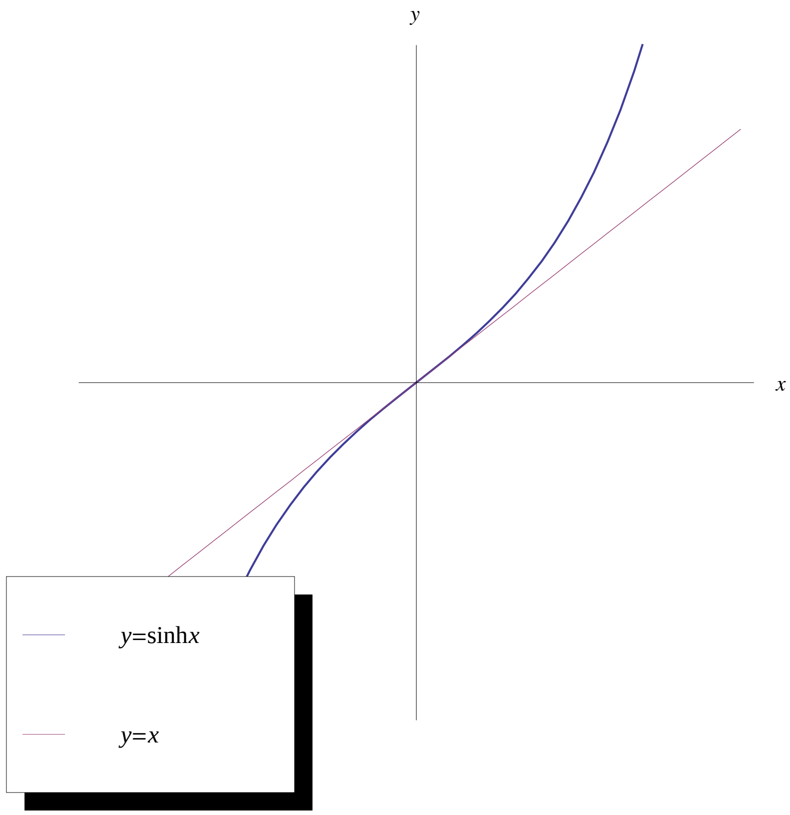


Figura 11: Diagramma cartesiano di $\sinh x$

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(e^x + e^{-x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\cosh x$ è una funzione pari. Il grafico di $\cosh x$ è riportato in fig. 12. Passiamo a $\tanh x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Per rimuovere l'indeterminazione, utilizziamo il seguente artificio: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x\left(1-e^{-2x}\right)}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, onde:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -\lim_{x\to+\infty} \tanh x = -1$$

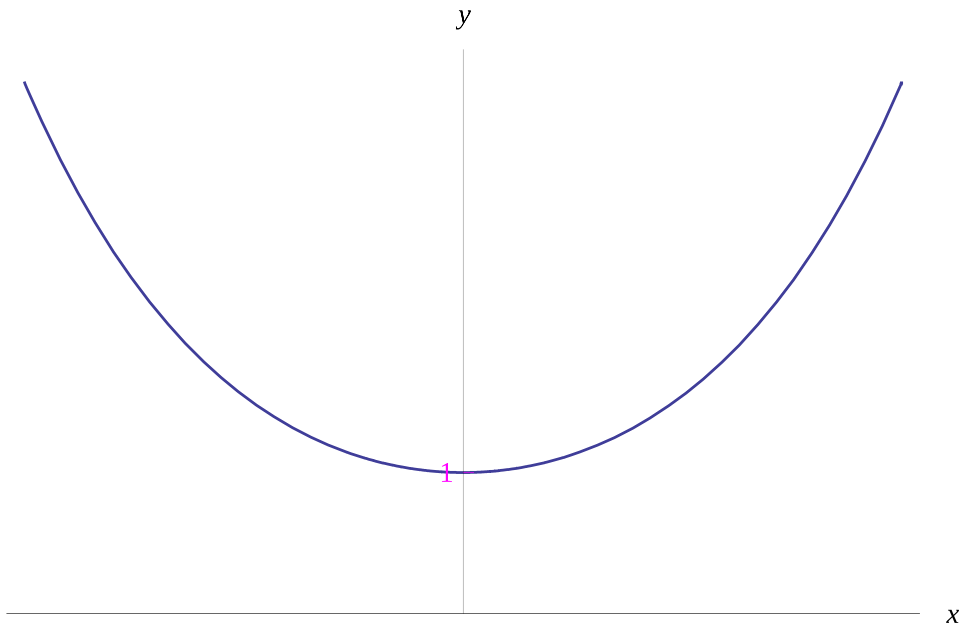


Figura 12: Diagramma cartesiano di $\cosh x$

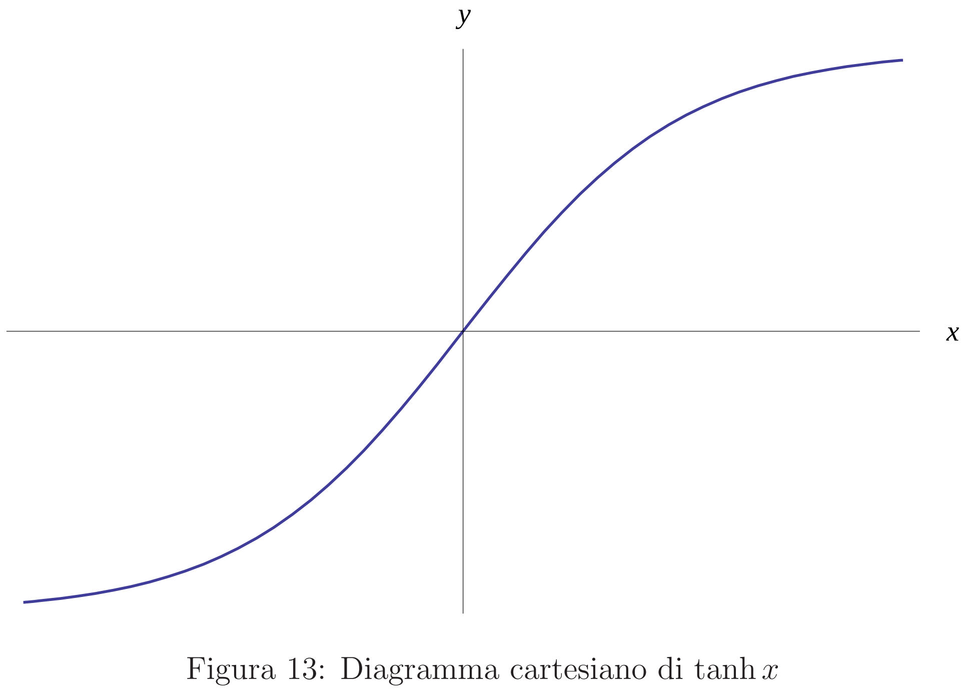


Figura 13: Diagramma cartesiano di $\tanh x$

Tale passaggio si giustifica osservando che $\tanh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\tanh x$ è riportato in fig. 13.

Le espressioni analitiche delle funzioni iperboliche inverse sono[1]:

$$\operatorname{arc}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \operatorname{arc}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\operatorname{arc}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\operatorname{arcsinh} x$ è definita in $(-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccosh} x$ in $[1, +\infty)$[2], $\operatorname{arctanh} x$ in $(-1, 1)$. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc}\sinh x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc}\sinh x = -\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arcsinh} x$ è riportato in fig. 14. Passiamo a $\operatorname{arccosh} x$:

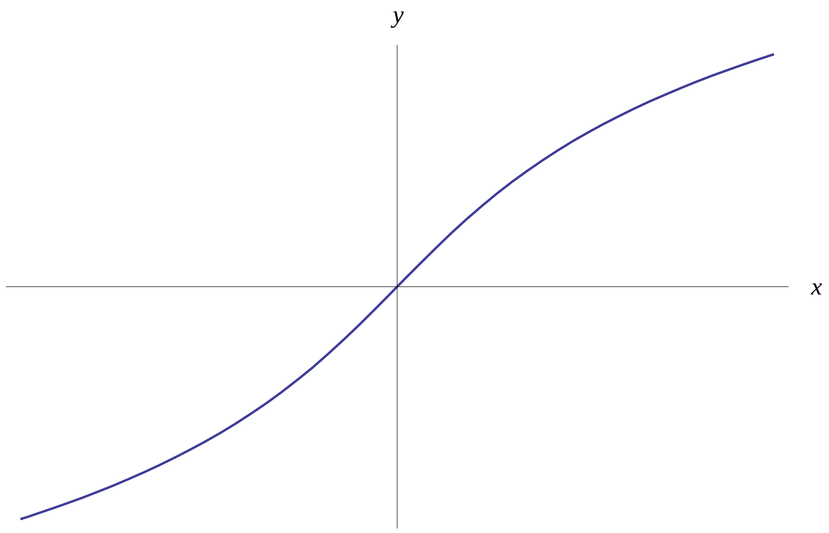


Figura 14: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arcsinh} x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc}\cosh x = +\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arccosh} x$ è riportato in fig. 15. Passiamo a $\operatorname{arctanh} x$:

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc}\tanh x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \frac{1}{2}\ln(+\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arc}\tanh x = -\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arc}\tanh x = -\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arctanh} x$ è riportato in fig. 16.

[1] Al solito, per ottenere l'espressione della funzione inversa di una assegnata $f(x)$ invertibile, si risolve (rispetto a x) l'equazione $y = f(x)$.

[2] Osserviamo che $\cosh x$ è invertibile solo localmente.

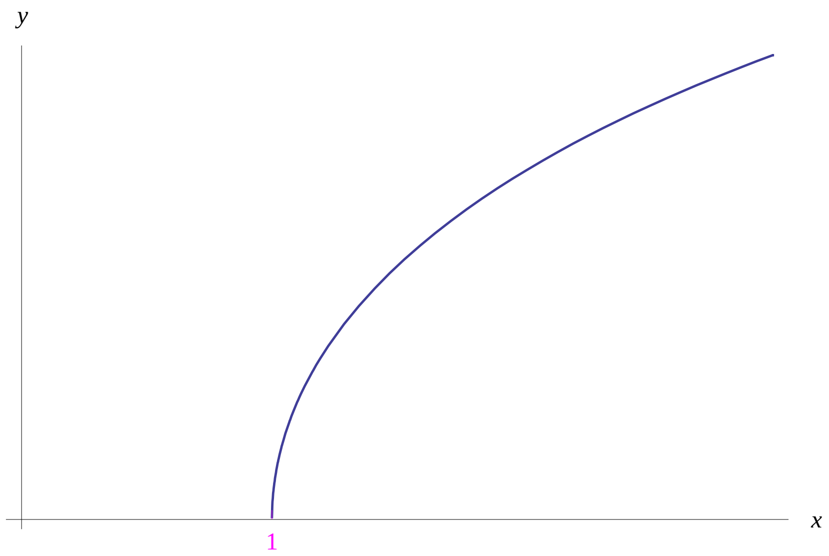


Figura 15: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arccosh} x$

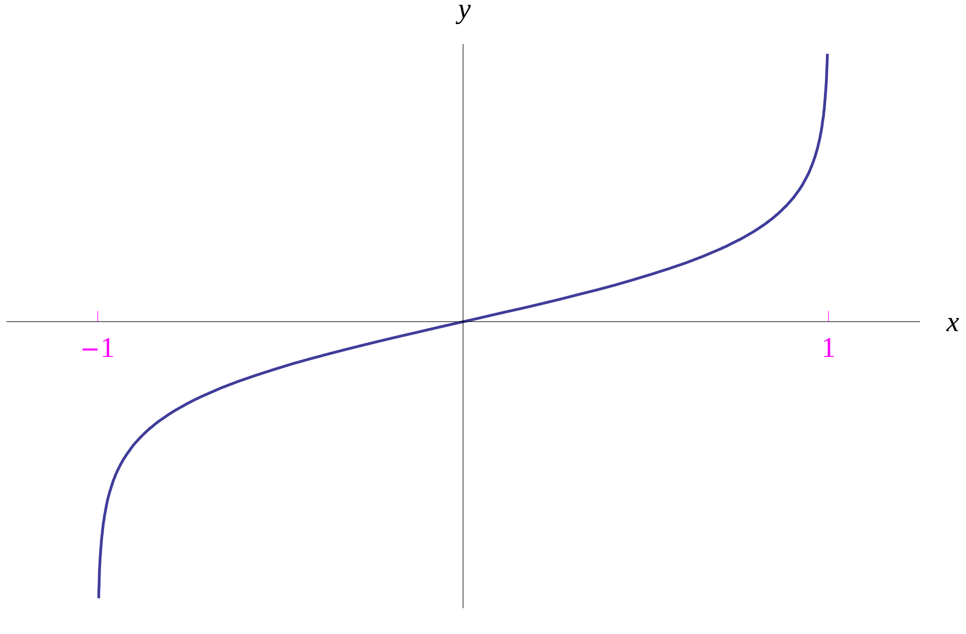


Figura 16: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arctanh} x$