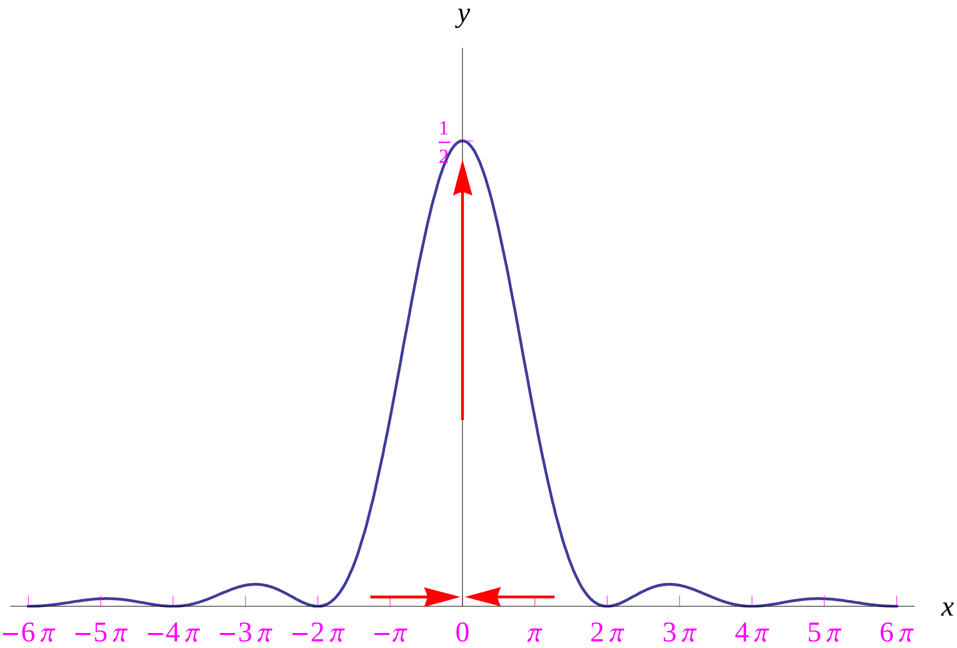
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Limiti notevoli

Marcello Colozzo



Proposizione 1 *Di seguito altri limiti notevoli che derivano da quelli fondamentali.*

Proposizione 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t = \arcsin x$, per cui:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$$

■

Proposizione 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} = 1 \tag{1}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{\sinh x}{x} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + e^{-x}\frac{e^x - 1}{x}\right),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}}_{=1} + \left(\underbrace{\lim_{x\to 0} e^{-x}}_{=1}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}\right] \\ &= 1\end{aligned}$$

■

Proposizione 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsinhx}{x} = 1 \tag{2}$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t =$arcsinh$x$, per cui:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsinh}x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sinh t} = 1$$

■

Proposizione 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \tag{3}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\right) = 1$$

■

Proposizione 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1 \tag{4}$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t=\arctan x$, per cui:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t}=1$$

■

Proposizione 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=1 \tag{5}$$

Dimostrazione. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cosh x}\right)=1$$

■

Proposizione 8

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \tag{6}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}\underset{t=\frac{x}{2}}{=}\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}$$

In fig. **??** riportiamo il grafico di $\frac{1-\cos x}{x^2}$. ■

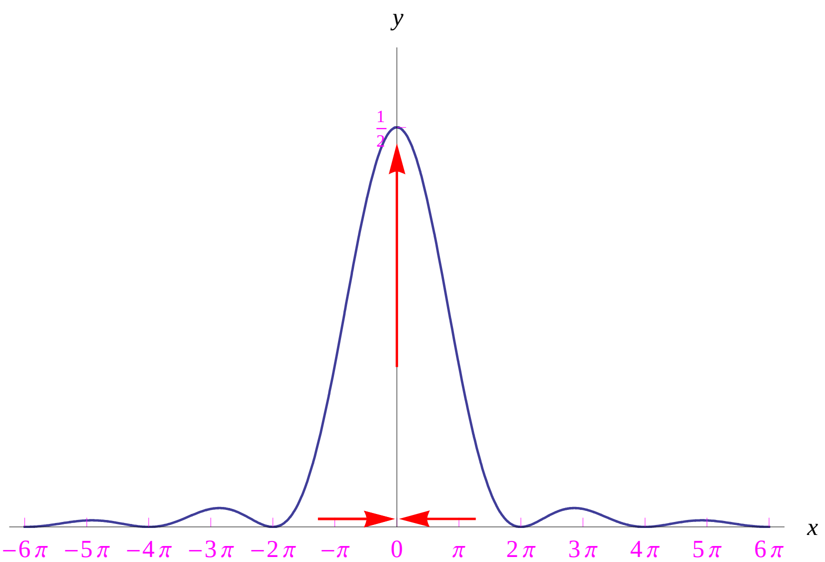


Figura 1: Grafico di $\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Proposizione 9

$$\lim_{|x|\to +\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \tag{7}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=\frac{x}{\alpha}$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^{\alpha}=\left[\lim_{|t|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\alpha}=e^{\alpha}$$

■

Proposizione 10

$$\lim_{x\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha} \tag{8}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=\alpha x$:

$$\lim_{x\to0}\left[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}\right]^{\alpha}=\left[\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\alpha}=e^{\alpha}$$

■