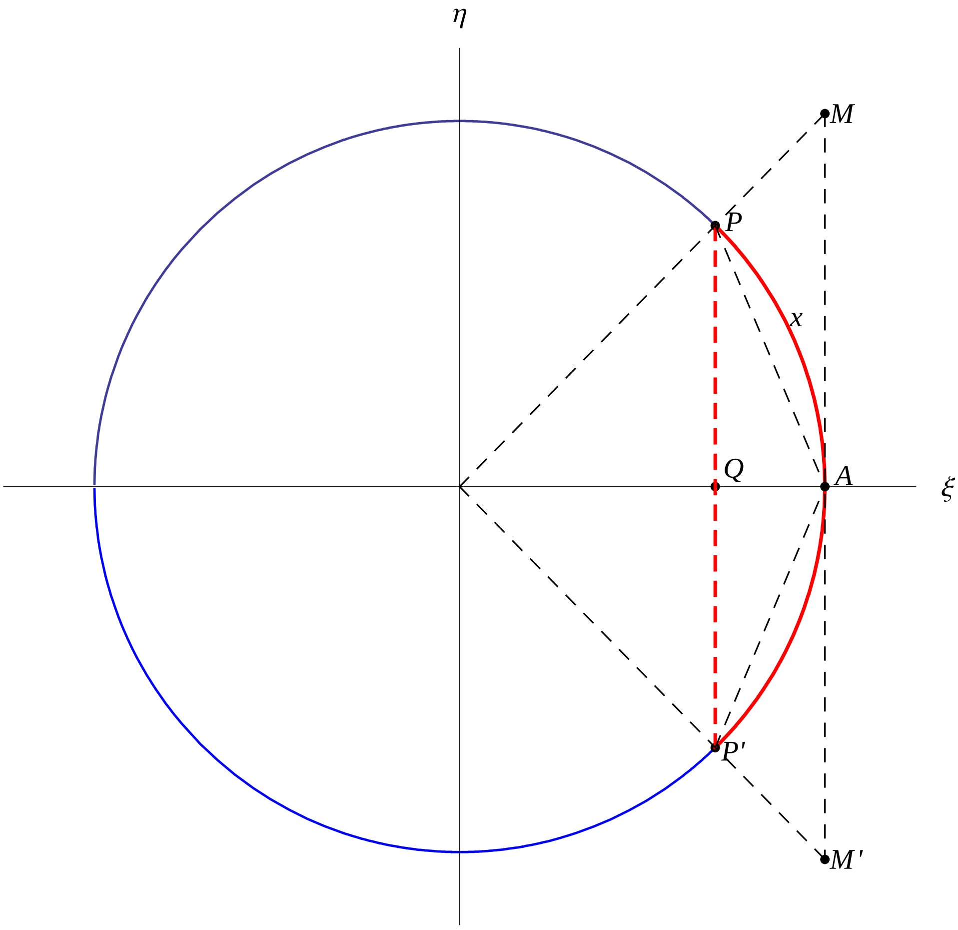
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Limiti fondamentali

Marcello Colozzo



Proposizione 1

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \tag{1}$$

Dimostrazione. Omessa. ■

Proposizione 2

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{2}$$

Dimostrazione. Basta eseguire nella (1) la sostituzione $t=\frac{1}{x}$. ■

Proposizione 3

$$\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a} \tag{3}$$

Dimostrazione. Riesce:

$$\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} &= \lim_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\\ &= \lg_a\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =\\ &= \lg_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

■

In particolare:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{4}$$

Proposizione 4

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \tag{5}$$

Dimostrazione. Eseguiamo il cambio di variabile $t=a^x-1$, da cui $x=\lg_a(t+1)$. Quindi, tenendo conto della (3):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{t\to0}\frac{t}{\lg_a(t+1)}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{1}{\frac{\lg_a(t+1)}{t}}\\ &= \frac{1}{\lim_{t\to0}\frac{\lg_a(t+1)}{t}} = \ln a\end{aligned}$$

■

Osservazione 5 *In particolare:*

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \tag{6}$$

Proposizione 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

Dimostrazione. Poniamo per definizione:

$$f_\alpha(x)=\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$$

Distinguiamo i due casi:

1. $\alpha=0$
2. $\alpha\neq 0$

Nel primo caso

$$f_{\alpha=0}(x)=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{-1\},$$

cosicchè

$$\lim_{x\to 0}f_{\alpha=0}(x)=0$$

Nel secondo caso scriviamo

$$f_\alpha(x)=\frac{g_a(x)}{x},$$

dove:

$$g_\alpha(x)=(1+x)^\alpha-1,$$

per cui:

$$\ln[1+g_\alpha(x)]=\ln(1+x)^\alpha=\alpha\ln(x+1),$$

e:

$$\lim_{x\to 0}g_\alpha(x)=0 \tag{7}$$

Inoltre:

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{g(x)}{x}=\frac{g(x)}{\ln[1+g_\alpha(x)]}\cdot\alpha\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Ne segue:

$$\lambda=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{\ln[1+g_\alpha(x)]}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Eseguendo nel primo limite a secondo membro il cambio di variabile $y=g_\alpha(x)$ e tenendo conto della (7):

$$\lambda=\alpha\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}=\alpha$$

■

Riassumendo:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
$\lim_{\lvert x\rvert\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
$\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$	