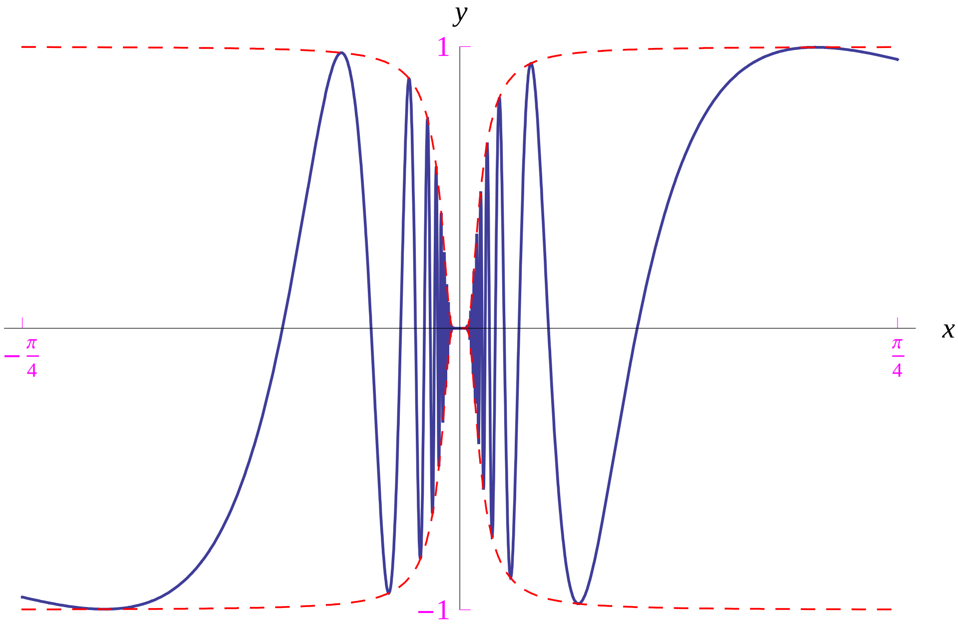
Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info
Quaderni di Analisi Matematica – 2016

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Limite di funzione trigonometrica

Marcello Colozzo



Esercizio 1 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to 0}\left[\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\sin\frac{1}{x}\right]=0 \tag{1}$$

Soluzione.
Riesce:

$$-\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\leq\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\sin\frac{1}{x}\leq\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right),\quad\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Inoltre:

$$\lim_{x\to 0}\left[-\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)=0$$

Quindi per il teorema dei carabinieri :

$$\lim_{x\to 0}\left[\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\sin\frac{1}{x}\right]=0$$

Alternativamente, eseguendo il cambio di variabile $t=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\exp\left(-\frac{1}{10^3x^2}\right)\sin\frac{1}{x}\right]=\lim_{|t|\to\infty}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{10^3}\right)\sin t\right]$$

Applicando la definizione di limite:

$$\lim_{|t|\to\infty}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{10^3}\right)\sin t\right]=0$$

Ne concludiamo che $x=0$ è una discontinuità eliminabile per la funzione assegnata, il cui diagramma compie – intorno a $x=0$ – un numero infinito di oscillazioni che si smorzano per $x\to 0$.