Limiti di funzioni trigonometriche

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Risolvere l'equazione in* $n \in \mathbb{N} - \{0\}$*:*

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2nx) + \sin(nx)}{\sin[(n+1)x] + \sin x} = \frac{3}{2}} \tag{1}$$

Soluzione.

Innanzitutto calcoliamo il limite a primo membro:

$$\lambda_n \stackrel{def}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2nx) + \sin(nx)}{\sin[(n+1)x] + \sin x}$$

Applicando le formule di prostaferesi:

$$\sin(2nx) + \sin(nx) = 2\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$
$$\sin[(n+1)x] + \sin x = 2\sin\left(\frac{n+2}{2}x\right)\cos\left(\frac{nx}{2}\right),$$

per cui:

$$\lambda_n = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{n+2}{2}x\right)} = \frac{3n}{n+2}$$

Deve essere

$$\frac{3n}{n+2} = \frac{3}{2},$$

da cui $n = 2$.