Comportamento di $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ in un intorno di $x = 0$

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Proposizione 1 *La funzione* $\sin\frac{1}{x}$ *è non regolare per* $x \to 0$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Tale funzione è definita in $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il punto $x = 0$ è di accumulazione per X. Gli zeri della funzione sono:

$$x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

I punti in cui $f(x) = +1$:

$$x'_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

I punti in cui $f(x) = -1$:

$$x''_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Restano così definite le successioni:

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}, \quad \{x'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \{x''_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

che sono convergenti a 0 per per $|k| \to +\infty$:

$$\lim_{|k| \to +\infty} x_k = \lim_{|k| \to +\infty} x'_k = \lim_{|k| \to +\infty} x''_k = 0 \tag{1}$$

In altri termini, in ogni intorno di $x = 0$ cadono (infiniti) punti in cui la funzione vale 0, altri in cui assume il valore -1 e altri ancora in cui vale $+1$.

Per $k \to +\infty$ applicando la definizione di limite di una successione:

$$\forall I_\sigma(0), \begin{cases} \exists n_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n_\sigma \Longrightarrow x_k \in I_\sigma(0) \setminus \{0\} \\ \exists n'_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n'_\sigma \Longrightarrow x'_k \in I_\sigma(0) \setminus \{0\} \\ \exists n''_\sigma \in \mathbb{N} \mid k > n''_\sigma \Longrightarrow x''_k \in I_\sigma(0) \setminus \{0\} \end{cases},$$

dove $I_\sigma(0) = (-\sigma, \sigma)$. Posto $\bar{n}_\sigma = \max\{n_\sigma, n'_\sigma, n''_\sigma\}$, si ha:

$$\forall I_\sigma(0), \ \exists \bar{n}_\sigma \in \mathbb{N} \mid \ k > \bar{n}_\sigma \Longrightarrow x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(0) \setminus \{0\}$$

Ripetendo lo stesso procedimento per $k \to -\infty$, si perviene a:

$$\forall I_\sigma(0), \ \exists \tilde{n}_\sigma \in \mathbb{N} \ \mid k < -\tilde{n}_\sigma \Longrightarrow x_k, x'_k, x''_k \in I_\sigma(0) \setminus \{0\}$$

Da ciò segue:

$$\forall I_\sigma(0), \ \exists x, x', x'' \in I_\sigma(0) \setminus \{0\} \mid \left(\begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x') = 1 \\ f(x'') = -1 \end{cases} \right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\nexists l \in \mathbb{R} \mid \forall J_\varepsilon(l), \ \exists I_{\delta_\varepsilon}(0) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon}(0) \setminus \{0\} \Longrightarrow f(x) \in J_\varepsilon(l))$$
$$\Longrightarrow \nexists l \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \to 0} f(x) = l$$

Infine, la funzione non può essere divergente a $\pm\infty$, in quanto è limitata nel proprio insieme di definizione. In fig. 1 è riportato il grafico della funzione per $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

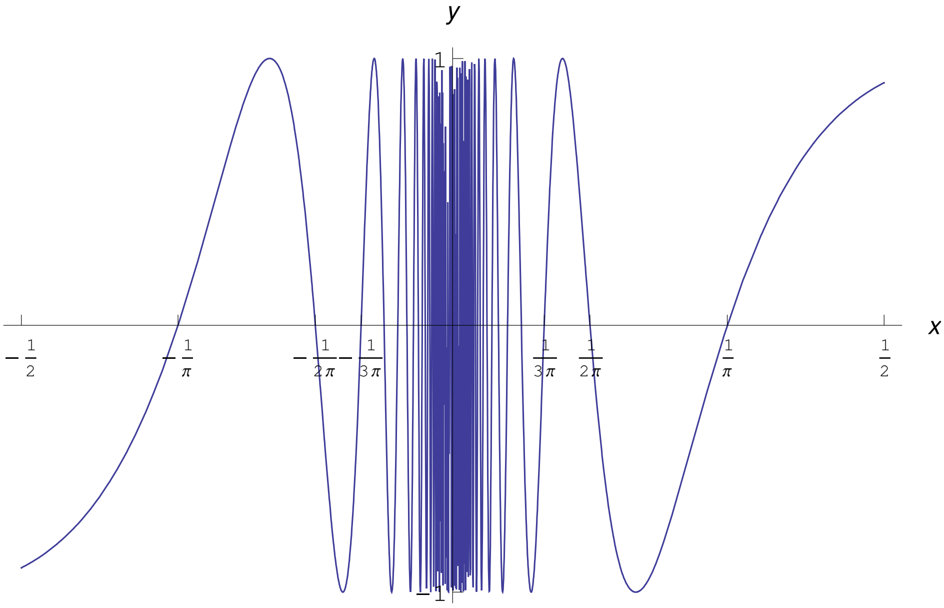

Figura 1: Per $x \to 0$ il grafico di $\sin \frac{1}{x}$ compie infinite oscillazioni tra -1 e $+1$. Pertanto, in ogni intorno di $x = 0$ la funzione assume infinite volte tutti i valori tra -1 e $+1$. Ciò implica che la funzione non converge per $x \to 0$, giacchè non esiste nessun $l \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$.

Osservazione 2 *Alla stessa conclusione si perviene eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$, ottenendo la funzione $g(t) = f(x(t)) = \sin t$, cosicchè:*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{|t| \to +\infty} \sin t$$

*Ma, per la proposizione **??**, tale limite non esiste.*

■