

---

# Lemma di Coriolis (parte 2)

Marcello Colozzo

## 0.1 Il lemma di Coriolis e le formule di Poisson. Il gruppo ortogonale $O(3)$

Riassumiamo i risultati del numero precedente. Assegnati due sistemi di riferimento  $K(Oxyz)$  e  $K'(O'x'y'z')$  aventi in comune le origini  $O, O'$ , e  $K'$  ruotante attorno a un asse (in generale variabile nel tempo), una grandezza vettoriale  $\mathbf{u}(t)$  ammette le seguenti rappresentazioni cartesiane:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= u_x(t)\mathbf{i} + u_y(t)\mathbf{j} + u_z(t)\mathbf{k} \\ \mathbf{u}(t) &= u'_x(t)\mathbf{i}' + u'_y(t)\mathbf{j}' + u'_z(t)\mathbf{k}'\end{aligned}\tag{1}$$

Abbiamo poi definito la derivata assoluta e la derivata relativa della predetta grandezza

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a &= \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k} \\ \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r &= \dot{u}'_x\mathbf{i}' + \dot{u}'_y\mathbf{j}' + \dot{u}'_z\mathbf{k}',\end{aligned}$$

legate dalla seguente relazione (lemma di Coriolis)

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$$

Nel corso della dimostrazione del predetto lemma, abbiamo stabilito:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega_z\mathbf{j}' - \omega_y\mathbf{k}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \omega_x\mathbf{k}' - \omega_z\mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = -\omega_y\mathbf{i}' - \omega_x\mathbf{j}' \end{cases}$$

Cioè le *formule di Poisson*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}' \end{cases}\tag{2}$$

Se  $\mathbf{u}(t)$  è il vettore posizione  $\mathbf{r}(t)$  otteniamo il legame tra la velocità relativa (cioè misurata da  $K'$ ) e la velocità assoluta (cioè misurata da  $K$ ):

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

da cui l'interpretazione di velocità angolare per ciò che riguarda la grandezza  $\boldsymbol{\omega}$  (che può ovviamente dipendere dal tempo).

La rotazione di  $K'$  rispetto a  $K$  può essere interpretata come una trasformazione di coordinate:

$$x' = f_1(x, y, z), \quad y' = f_2(x, y, z), \quad z' = f_3(x, y, z),$$

dove  $f_k$  sono funzioni assegnate. Nel formalismo delle matrici, la trasformazione si scrive:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo  $R$  la matrice di trasformazione che connette i due sistemi di coordinati. È chiaro che in tal modo stiamo studiando come si trasforma il vettore posizione  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  passando da  $K$  a  $K'$ . Per un qualunque vettore  $u$  si ha

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

con

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \end{pmatrix} \quad (4)$$

matrice ortogonale:

$$RR^T = R^T R = \bar{1} \quad (5)$$

dove  $R^T$  è la matrice trasposta, mentre  $\bar{1}$  è la matrice identità di ordine 3. L'ortogonalità di  $R$  deriva dalla ortogonalità delle rispettive terne di versori. Più precisamente, si tratta di due basi ortonormali dello spazio euclideo tridimensionale. La normalizzazione (i.e. versori ovvero modulo unitario) si traduce nella seguente proprietà delle matrici ortogonali:

$$\det R = \pm 1 \quad (6)$$

Per essere più precisi, si considera il segno (+), poiché il segno (−) esprime una cosiddetta *trasformazione non continua*. Ad esempio, l'inversione degli assi (fig. 1)

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z$$

è rappresentata dalla seguente matrice

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\bar{1}$$

che è manifestamente ortogonale con  $\det R = -1$ . Tale trasformazione non è continua in un senso che preciseremo più avanti.

Consideriamo ora il caso di una rotazione uniforme attorno all'asse  $z$ , per cui il vettore velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega} = k\boldsymbol{\omega}, \quad \text{con } \omega > 0 \text{ costante}$$

Ne consegue che l'angolo di rotazione segue la legge  $\theta(t) = \omega t$ . Per un assegnato istante di tempo  $t$ , consideriamo il valore corrispondente  $\theta$ . Abbiamo quindi la configurazione di fig. 2.

Esplicitando i prodotti scalari quali elementi della matrice di rotazione, otteniamo

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Assumendo  $\theta$  come variabile indipendente:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} R_z(\theta) = \bar{1},$$

che si generalizza a una qualunque rotazione (non necessariamente attorno all'asse  $z$ )

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} R(\theta) = \bar{1}$$

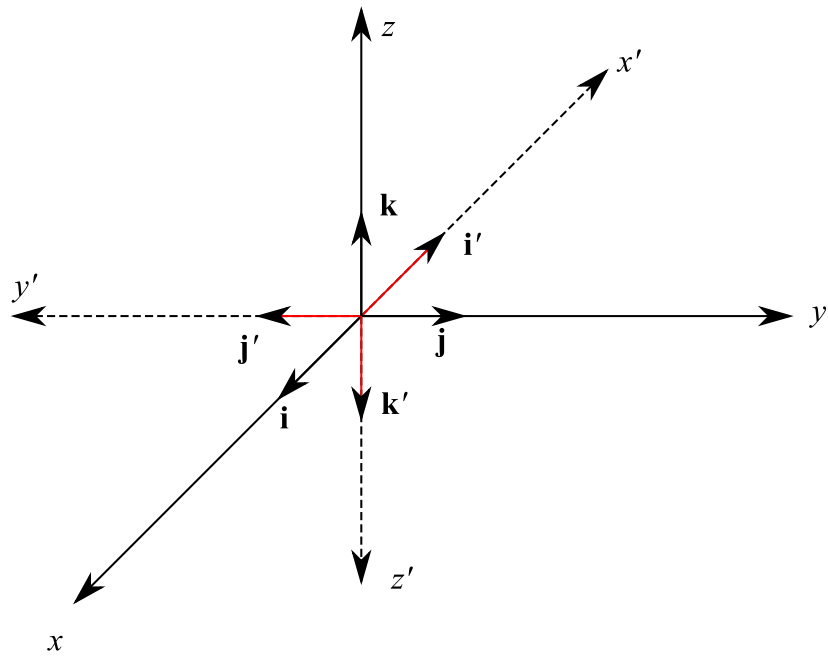


Figura 1: Inversione degli assi coordinati.

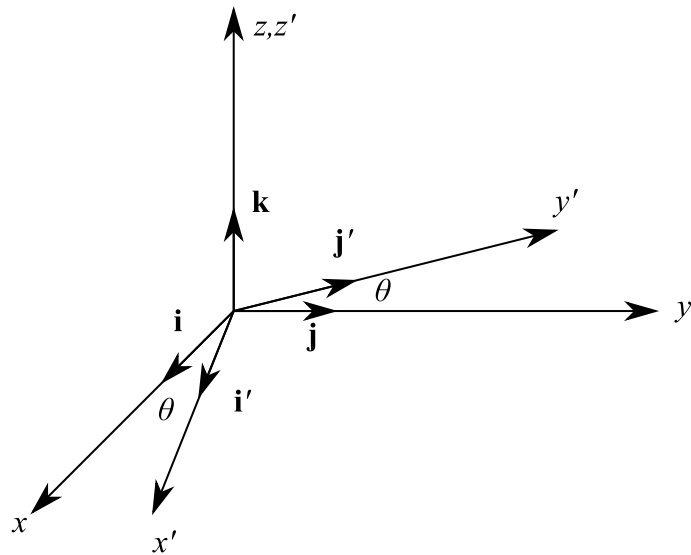


Figura 2: Il sistema di coordinate  $K'$  è ruotato di un angolo  $\theta$  (in senso antiorario per un osservatore rivolto verso  $z$ ) attorno all'asse  $z$ .

In altri termini, una qualunque rotazione del sistema di coordinate, è il risultato della composizione di rotazioni infinitesime attorno allo stesso asse. Diversamente, un'inversione degli assi non è riducibile a una successione di infinite rotazioni infinitesime. Incidentalmente:

$$\det R_z(\theta) = +1$$

mentre abbiamo visto che nel caso di una inversione il determinante è  $-1$ . Abbiamo quindi giustificato la locuzione *trasformazione non continua*.

In maniera del tutto analoga si stabiliscono le seguenti formule per ciò che riguarda le rotazioni attorno agli assi  $x, y$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

Si noti che

$$R_x(\theta) R_y(\theta) \neq R_y(\theta) R_x(\theta)$$

E in generale

$$R(\theta) R'(\theta') \neq R'(\theta') R(\theta),$$

dove  $R$  e  $R'$  sono le matrici di rotazioni attorno a differenti assi. Ciò non deve sorprendere, giacché il prodotto righe per colonne è in generale, non commutativo.

Abbiamo quindi stabilito che una rotazione del sistema di coordinate è una trasformazione *ortogonale* delle coordinate (che è un caso speciale di trasformazione lineare implementata da una matrice non ortogonale). L'ortogonalità assicura la conservazione delle distanze e più in generale dei moduli dei vettori.

Denotiamo ora con  $O(3)$  l'insieme delle matrici ortogonali di ordine  $r$ , quale sottoinsieme delle matrici di ordine 3 sul campo reale. La moltiplicazione righe per colonne è una legge di composizione interna in  $O(3)$ . Infatti:

$$(R_1 R_2) (R_1 R_2)^T = (R_1 R_2) (R_2^T R_1^T) = R_1 (R_2 R_2^T) R_1^T = R_1 R_1^T = \bar{1}, \quad \forall R_1, R_2 \in O(3)$$

Tale legge verifica manifestamente le seguenti proprietà:

1. **Proprietà associativa**

$$R_1 (R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3, \quad \forall R_1, R_2 \in O(3)$$

2. **Esistenza dell'elemento neutro**

$$R \bar{1} = \bar{1} R, \quad \forall R \in O(3)$$

3. **Esistenza dell'inverso**

$$4. \exists R^{-1} \in O(3) \mid R R^{-1} = R^{-1} R = \bar{1}, \quad R^{-1} = R^T$$

Come è noto, tali proprietà conferiscono all'insieme  $O(3)$  la struttura algebrica di *gruppo non abeliano*. Chiamiamo il predetto gruppo **gruppo delle rotazioni**.