Introduzione alle curve regolari

Marcello Colozzo

0.1 Introduzione

Intuitivamente, una curva regolare verifica le seguenti proprietà:

1. non si *spezza*, i.e. è priva di punti di interruzione. Ad esempio, se stiamo tracciando su un foglio una curva di questo tipo, non abbiamo la necessità di sollevare la penna dal foglio medesimo;
2. è *liscia* ovvero dotata di retta tangente in ogni suo punto (quindi la curva non presenta punti angolosi/cuspidi);
3. non si *intreccia*, ossia è priva di *punti multipli*.

In fig. 1 è riportato un esempio di curva regolare, mentre le figg.2-3-4 illustrano curve non regolari.

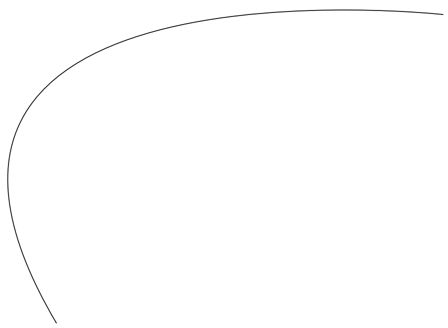

Figura 1: Esempio di curva regolare.

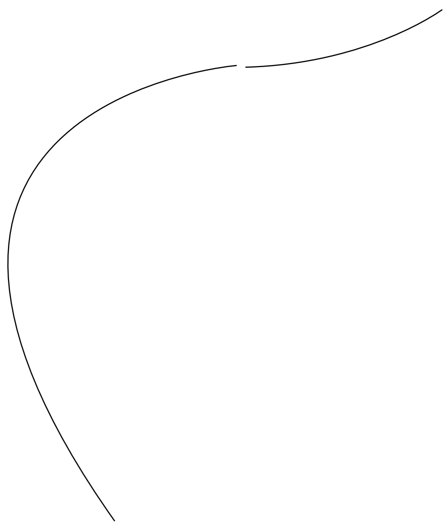

Figura 2: Esempio di curva con interruzione, quindi non regolare.

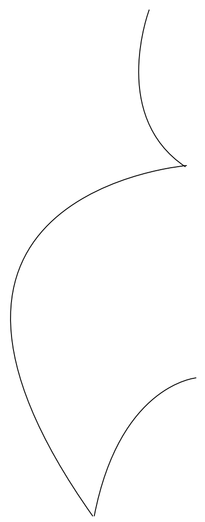

Figura 3: Esempio di curva con punti angolosi.

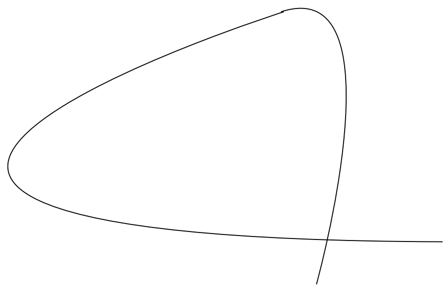

Figura 4: Esempio di curva che si intreccia (esistenza di un *punto doppio*).

Ora si tratta di tradurre in termini analitici, i punti 1,2,3. A tale scopo fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$, come in fig. 5, dove possiamo immaginare una situazione di tipo cinematico in cui P è un punto mobile sulla curva assegnata (traiettoria). Nello specifico se il sistema di assi cartesiani definisce un riferimento inerziale, possiamo esprimere la posizione del predetto punto in funzione del tempo t. Quest'ultimo svolge il ruolo di parametro; in particolare $t \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

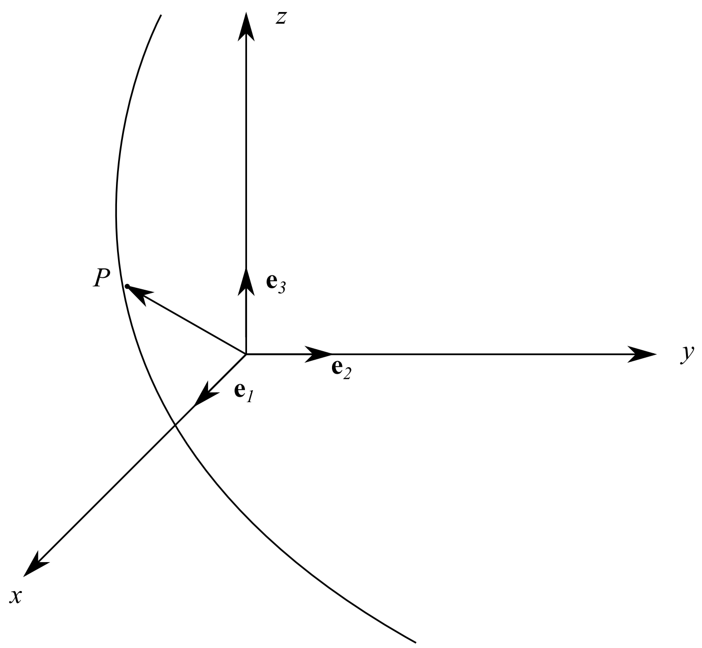

Figura 5: Andamento di una generica curva rispetto a un assegnato riferimento cartesiano dello spazio euclideo tridimeinaionale.

Ne consegue

$$x = x(t), \; y = y(t), \; z = z(t), \quad t \in [a,b] \tag{1}$$

La (1) è nota come *rappresentazione parametrica* della curva data, e l'intervallo di definizione delle funzioni, si chiama *base* della rappresentazione. In tal modo le condizioni 1 e 2 (assenza di interruzioni ed esistenza della retta tangente) si traducono nella richiesta di continuità delle funzioni $x(t), y(t), z(t)$, e della derivata prima, in tutto l'intevallo $[a,b]$. Si aggiunge poi una seconda condizione secondo cui la velocità vettoriale del punto non si annulla ma per ogni istante di tempo:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0, \quad \forall\, t \in [a,b]$$

Infine, l'assenza di punti multipli equivale a stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti della curva e gli istanti di tempo.

Ricapitolando, in generale (cioè, non necessariamente nel caso cinematico), una rappresentazione parametrica è *regolare* se:

I. $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a,b])$

II. $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 > 0, \quad \forall\, t \in [a,b]$

III. $(x(t'), y(t'), z(t')) \neq (x(t''), y(t''), z(t'')), \quad \forall t', t'' \in [a,b], \quad (t' \neq t'')$

Osservazione 1 *In alcuni casi è possibile lasciar cadere la terza condizione.*

0.2 Funzioni vettoriali di una variabile scalare

In fig. 5 sono visibili i versori degli assi coordinati, che nel linguaggio dell'algebra lineare compongono una *base ortonormale* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$. Ne consegue che la (1) può essere scritta in forma vettoriale

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t \in [a, b] \tag{2}$$

essendo

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_1 + y(t)\,\mathbf{e}_2 + z(t)\,\mathbf{e}_3$$

o ciò che è lo stesso, la terna ordinata

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Ciò che abbiamo scritto è un caso particolare di **funzione vettoriale** della variabile scalare t. In generale, un tale ente è una legge di corrispondenza da un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che possiamo denotare con X (non necessariamente un intervallo) a $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f} : X \to \mathbb{R} \\ &\mathbf{f} : t \in X \to \mathbf{f}(t) \end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\,\mathbf{e}_1 + f_2(t)\,\mathbf{e}_2 + f_3(t)\,\mathbf{e}_3$$

o ciò che è lo stesso

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$$

0.2.1 Funzioni limitate

Sia $\mathbf{f}(t)$ una funzione vettoriale definita in X (intervallo):

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\,\mathbf{e}_1 + f_2(t)\,\mathbf{e}_2 + f_3(t)\,\mathbf{e}_3$$

Definizione 2 *Dicesi* **modulo** *di $f(t)$, la funzione scalare*

$$|\mathbf{f}(t)| = +\sqrt{f_1(t)^2 + f_2(t)^2 + f_3(t)^2}, \quad \forall\, t \in X$$

Definizione 3 $\mathbf{f}(t)$ *è* **limitata** *in X, se esiste uno scalare $M > 0$ tale che*

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in X$$

Se in particolare, la funzione definisce una rappresentazione parametrica di una curva γ con base X, cioè se

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

dire che $\mathbf{x}(t)$ è limitata in X, equivale a dire che la curva è confinata nel dominio sferico di centro l'origine e raggio M, comej illustrato in fig. 6.

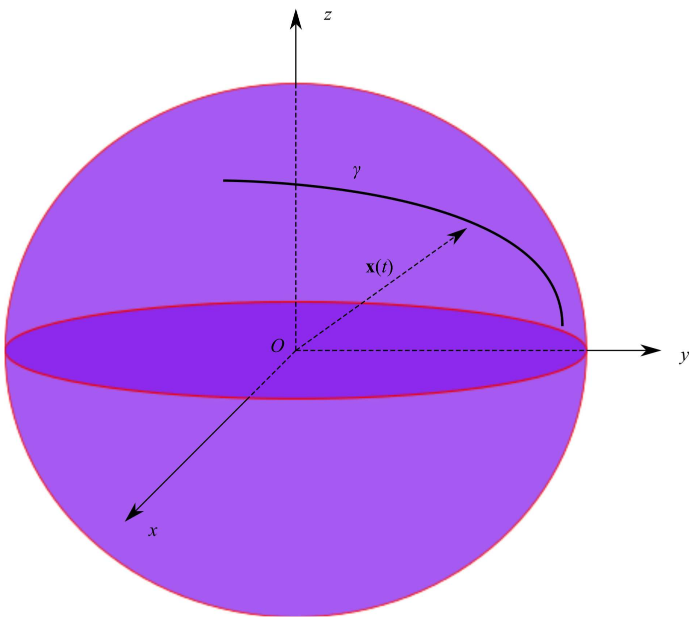

Figura 6: Funzione vettoriale limitata.

Capitolo 1