Calcolo di integrali indefiniti

Matematica Open Source `http://www.extrabyte.info`

Chiediamo a *Mathematica* di calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 * x^2 - 1}}$$

$$\frac{\text{Log}\left[2\,x + \sqrt{-2 + 4\,x^2}\,\right]}{\sqrt{2}}$$

Calcolando l'integrale "a mano" (si pone $t = \sqrt{2}\ x$): $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\ x + \sqrt{2\,x^2 - 1}\,\right| + C$

A parte la presenza del valore assoluto, abbiamo ottenuto un risultato apparentemente diverso. Apparentemente, poichè le due espressioni (la nostra e quella di Mathematica) differiscono per una costante. Per rendersene conto chiediamo a *Mathematica* di calcolare la differenza tra le due espressioni in un assegnato intervallo:

$$\text{Table}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{Log}\left[\sqrt{2} * x + \sqrt{2 * x^2 - 1}\,\right] - \frac{\text{Log}\left[2\,x + \sqrt{-2 + 4\,x^2}\,\right]}{\sqrt{2}},\ \{x, 2, 4, 0.1\}\right] // N$$

```
{-0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065,
 -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065,
 -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065,
 -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065, -0.245065}
```

Vediamo dunque che la differenza tra il valore trovato da *Mathematica* e quello calcolato a mano, è di -0.245065 (a meno dell'approssimazione numerica utilizzata da *Mathematica*). La costante può essere tirata fuori manipolando l'espressione che abbiamo calcolato:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\ x + \sqrt{2\,x^2 - 1}\,\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\,x^2 - 1}\right)\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\,x^2 - 1}\right)\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\,x + \sqrt{4\,x^2 - 2}\right)\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|2\,x + \sqrt{4\,x^2 - 2}\,\right| - \ln\sqrt{2}\right] + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|2\,x + \sqrt{4\,x^2 - 2}\,\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2 + C$$

Riesce:

$$\frac{-1.}{2\sqrt{2}}\,\text{Log}[2]$$

```
-0.245065
```

che è proprio il termine costante che stavamo cercando. Allora, possiamo incorporarlo nella costante di integrazione, con la posizione $C' = C - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln 2$, cosicchè: $\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2-2}\right| + C'$, in accordo con il risultato trovato da *Mathematica*.