Generalizzazione della nozione di integrale definito

Matematica Open Source **http:www.extrabyte.info**

```
SetOptions[
  Plot,
  BaseStyle → {FontFamily → "Georgia", FontSize → 9}
 ];
```

Discutiamo numericamente l'esistenza dell'integrale definito $\int_0^1 f(x)\,dx$, dove

$$f[x\_] := -\frac{\mathrm{Log}[x]}{x}$$

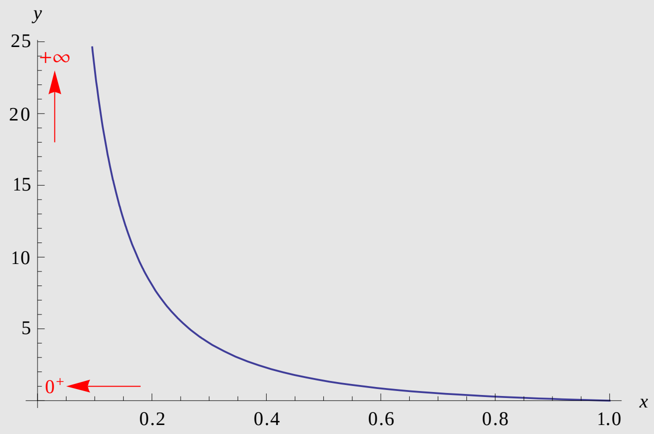
Tale funzione diverge positivamente per $x \to 0^+$

```
Limit[
 f[x], x → 0,
 Direction → -1
]
```

∞

La funzione è non negativa in (0,1]:

```
plotf = Plot[
  f[x], {x, 0, 1},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotStyle → Thickness[0.003],
  Ticks → {Automatic, Automatic},
  Epilog → {{RGBColor[1, 0, 0], Arrow[{{0.03, 18}, {0.03, 23}}]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Text["+∞", {0.03, 24}]}, {RGBColor[1, 0, 0],
     Arrow[{{0.18, 1}, {0.05, 1}}], Text["0⁺", {0.03, 1}]}}
 ]
```



Eseguiamo una equipartizione di [0,1]:

```
lista[n_] := lista[n] = Table[k/n, {k, 0, n}] // Sort;
```

```
x[k_, n_] := lista[n][[k]]
```

Per una migliore visualizzazione dell'andamento delle somme integrali, determiniamo le somma integrali con la formula $\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k)$, assumendo cioè $\xi_k = \frac{x_k + x_{x+1}}{2}$.

```
σ[n_] := Sum[
  f[(x[k, n] + x[k + 1, n])/2] (x[k + 1, n] - x[k, n]), {k, 1, n}
 ]
```

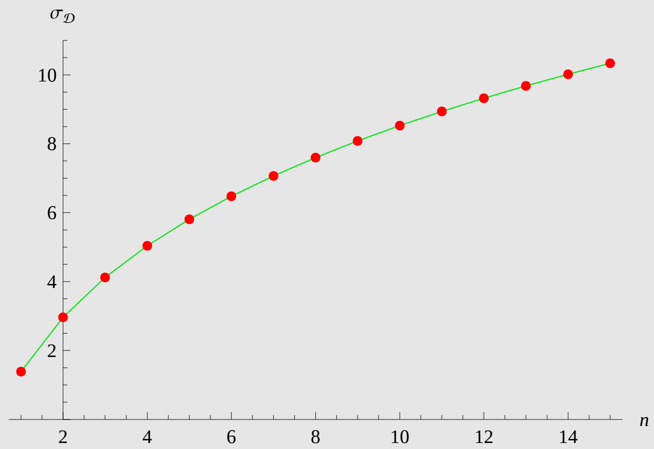
```
somme1 = TableForm[
   Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 50}],
   TableHeadings → {None, {StyleForm["n", FontWeight -> "Bold"],
      StyleForm["somma integrale", FontWeight -> "Bold"]}}
  ] //
  N
```

n	**somma integrale**
1.	1.38629
2.	2.96438
3.	4.11855
4.	5.03892
5.	5.8104
6.	6.47795
7.	7.0684
8.	7.59915
9.	8.08214
10.	8.52597
11.	8.93705
12.	9.32027
13.	9.67949
14.	10.0178
15.	10.3377
16.	10.6413
17.	10.9302
18.	11.206
19.	11.4699
20.	11.7229
21.	11.9661
22.	12.2001
23.	12.4258
24.	12.6437
25.	12.8544
26.	13.0584
27.	13.2562
28.	13.4481
29.	13.6346
30.	13.8159
31.	13.9923
32.	14.1642
33.	14.3317
34.	14.4951
35.	14.6547
36.	14.8106
37.	14.9629
38.	15.1119
39.	15.2578
40.	15.4006
41.	15.5404
42.	15.6775
43.	15.8119
44.	15.9438
45.	16.0732
46.	16.2003
47.	16.3251
48.	16.4477
49.	16.5682
50.	16.6867

Grafichiamo $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$ per n variabile da 1 a 15.

```
somme := Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 15}];
```

```
graficosomme1 = ListLinePlot[
  somme,
  PlotRange → {0, 11},
  Epilog →
   {Green, Line[somme], PointSize[Medium], Red, Point[somme]},
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟"}
 ]
```

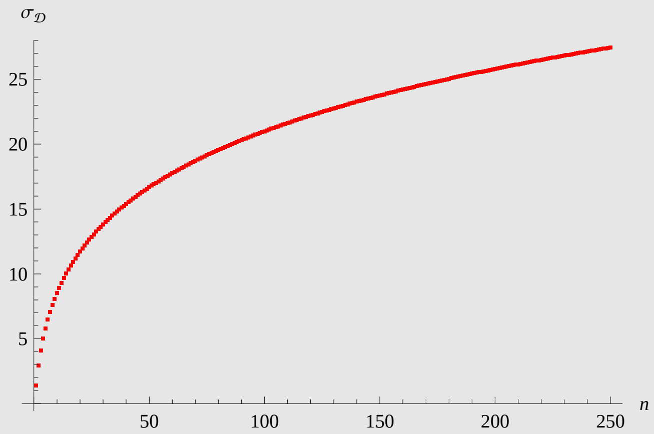


Dal grafico emerge un comportamento divergente. Aumentiamo il numero di punti della partizione.

```
Clear[somme]
```

```
somme := Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 250}];
```

```
graficosomme1 = ListPlot[
  somme,
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.006]},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟"}
 ]
```



Cioè $\lim_{n\to+\infty} \sigma_{\mathcal{D}}(n) = +\infty$

```
Clear[
 f,
 plotf,
 somme,
 somme1,
 graficosomme,
 graficosomme1,
 lista,
 σ
]
```

Consideriamo ora la funzione:

$$f[x\_] := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

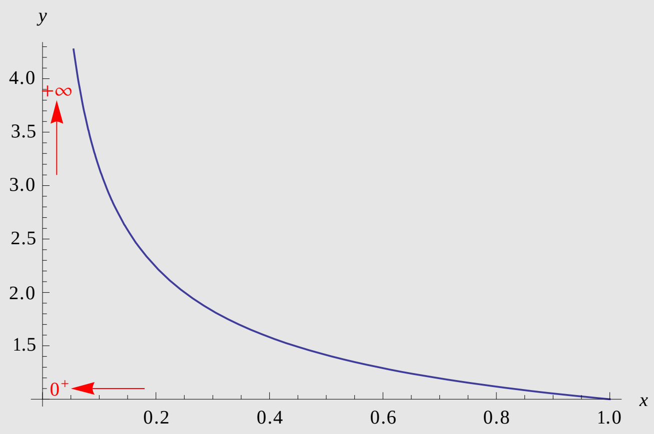
che diverge positivamente per $x \to 0^+$

```
Limit[
 f[x], x → 0,
 Direction → -1
]
```

∞

La funzione è positiva in (0,1]:

```
plotf = Plot[
  f[x], {x, 0, 1},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotStyle → Thickness[0.003],
  Ticks → {Automatic, Automatic},
  Epilog →
   {{RGBColor[1, 0, 0], Arrow[{{0.025, 3.1}, {0.025, 3.8}}]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Text["+∞", {0.025, 3.9}]},
    {RGBColor[1, 0, 0], Arrow[{{0.18, 1.1}, {0.05, 1.1}}],
     Text["0+", {0.03, 1.1}]}}
 ]
```



Eseguendo la solita partizione:

```
lista[n_] := lista[n] = Table[k/n, {k, 0, n}] // Sort;
```

```
x[k_, n_] := lista[n][[k]]
```

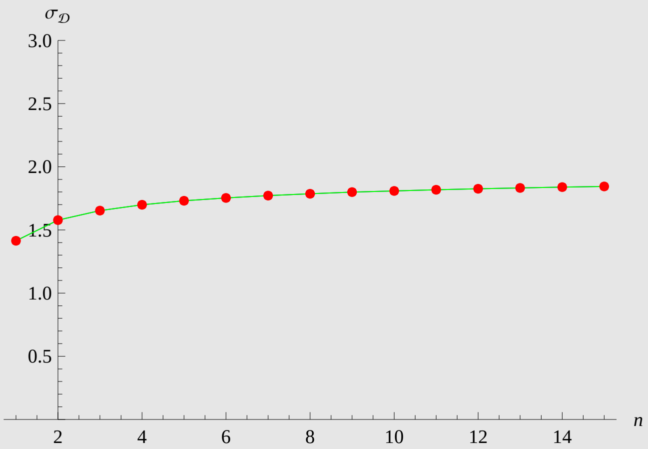
```
σ[n_] := Sum[
  f[(x[k, n] + x[k + 1, n])/2] (x[k + 1, n] - x[k, n]), {k, 1, n}
 ]
```

```
somme1 = TableForm[
   Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 50}],
   TableHeadings → {None, {StyleForm["n", FontWeight -> "Bold"],
      StyleForm["somma integrale", FontWeight -> "Bold"]}}
  ] //
  N
```

n	**somma integrale**
1.	1.41421
2.	1.57735
3.	1.65305
4.	1.69884
5.	1.73031
6.	1.75363
7.	1.77179
8.	1.78646
9.	1.79862
10.	1.80892
11.	1.81779
12.	1.82553
13.	1.83235
14.	1.83844
15.	1.84391
16.	1.84886
17.	1.85336
18.	1.85749
19.	1.86128
20.	1.86479
21.	1.86805
22.	1.87108
23.	1.87391
24.	1.87656
25.	1.87905
26.	1.8814
27.	1.88362
28.	1.88571
29.	1.8877
30.	1.88958
31.	1.89138
32.	1.89309
33.	1.89472
34.	1.89628
35.	1.89777
36.	1.8992
37.	1.90057
38.	1.90189
39.	1.90315
40.	1.90437
41.	1.90554
42.	1.90667
43.	1.90777
44.	1.90882
45.	1.90984
46.	1.91082
47.	1.91178
48.	1.9127
49.	1.91359
50.	1.91446

```
somme = Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 15}];
```

```
graficosomme = ListLinePlot[
  somme,
  PlotRange → {0, 3},
  Epilog →
   {Green, Line[somme], PointSize[Medium], Red, Point[somme]},
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟"}
 ]
```

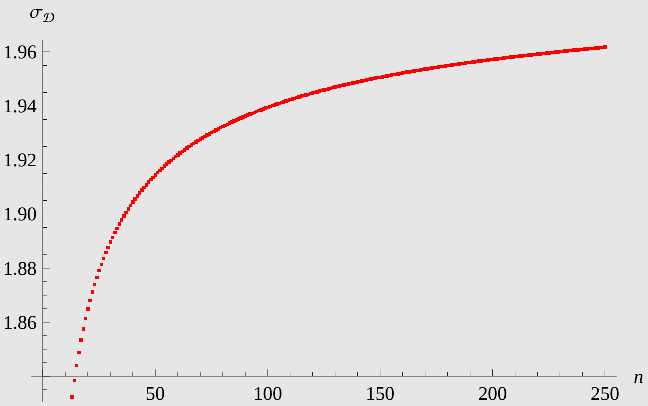


Il grafico mostra una possibile convergenza di $\sigma_{\mathcal{D}}(n)$. Per verificare, aumentiamo il numero di punti della partizione.

```
Clear[somme]
```

```
somme = Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 250}];
```

```
graficosomme1 = ListPlot[
  somme,
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.006]},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟"}
 ]
```



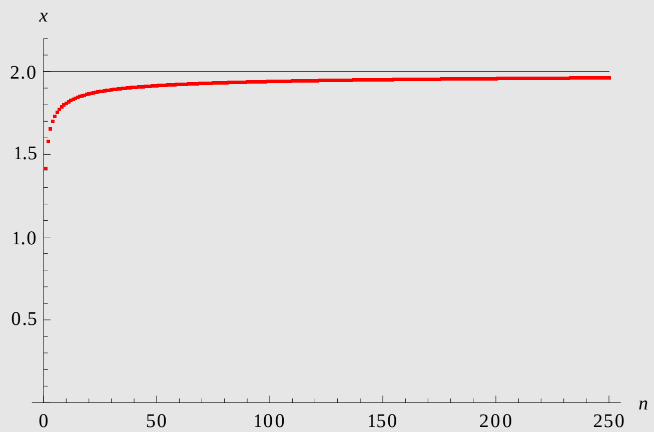
La successione $\{\sigma_{\mathcal{D}}(n)\}$ sembra effettivamente convergere a 2. Tale conclusione è confermata dal calcolo del seguente integrale definito:

```
intf = ∫_0^1 f[x] ⅆx
```

```
2
```

Riplottando:

```
Show[
 Plot[
  intf, {x, 0, 250},
  PlotRange → {0, 2.2}],
 graficosomme1,
 AxesLabel → {"n", "x"}
]
```




```
Clear[
 f,
 plotf,
 somme,
 somme1,
 graficosomme,
 graficosomme1,
 lista,
 σ,
 intf
]
```

Consideriamo:

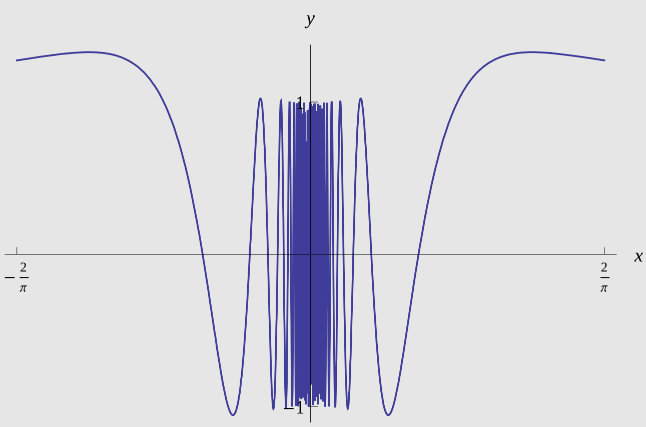
```
f[x_] := 2 x Sin[1/x] - Cos[1/x]
```

Tale funzione è non regolare in x=0

```
Limit[
 f[x], x → 0,
 Direction → -1
]
```

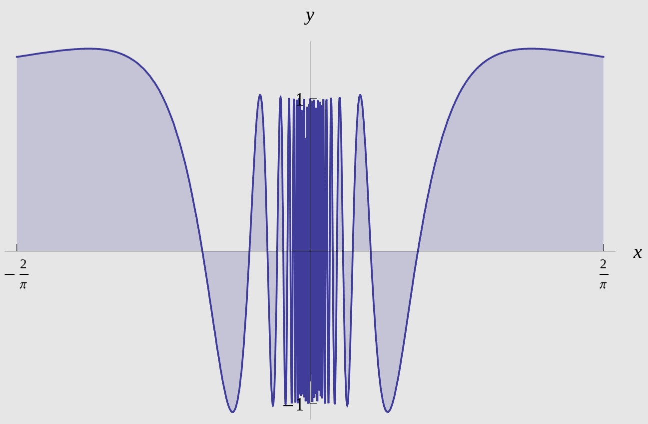
```
Interval[{-1, 1}]
```

```
plotf = Plot[
   f[x], {x, -2/π, 2/π},
   PlotRange → Automatic,
   AxesLabel → {"x", "y"},
   PlotStyle → Thickness[0.003],
   Ticks → {{-2 / π, 2 / π}, {-1, 1}}
  ]
```



Proviamo a visualizzare il rettangoloide:

```
rettangoloidef = Plot[
  f[x], {x, -2/π, 2/π},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotStyle → Thickness[0.003],
  Ticks → {{-2/π, 2/π}, {-1, 1}},
  Filling → Axis
 ]
```



Studiamo l'esisenza del limite delle somme integrali, relativamente all'intervallo $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$. Eseguendo il procedimento standard di decomposizione dell'intervallo di integrazione e calcolo delle somme integrali:

```
Clear[lista]
```

```
lista[n_] := lista[n] = Table[-2/π + k * 4/(n * π), {k, 0, n}] // Sort;
```

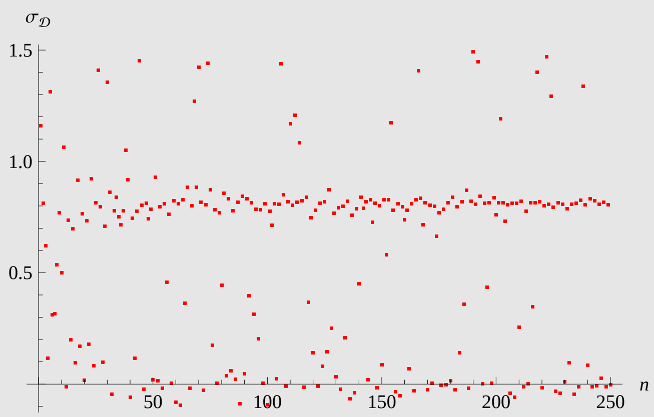
```
x[k_, n_] := lista[n][[k]]
```

```
ξ[k_, n_] := ξ[k, n] = Random[Real, {x[k, n], x[k + 1, n]}];
```

```
σ[n_] := Sum[
  f[ξ[k, n]] (x[k + 1, n] - x[k, n]), {k, 1, n}
 ]
```

```
somme = Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 250}];
```

```
graficosomme1 = ListPlot[
  somme,
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.006]},
  PlotRange → Automatic,
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟"}
 ]
```



Come nel caso precedente, notiamo una convergenza. Chiediamo allora a *Mathematica* il valore del limite delle somme integrale, i.e. dell'integrale definito:

```
intf = ∫_{-2/π}^{2/π} f[x] ⅆx
```

$$\frac{8}{\pi^2}$$

Riplottiamo:

```
sommearea = Show[
  graficosomme1,
  Plot[intf, {n, 0, 250}],
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟, μ(T)"},
  Ticks → {Automatic, {{intf, "μ(T) = 8/π²"}}}
 ]
```