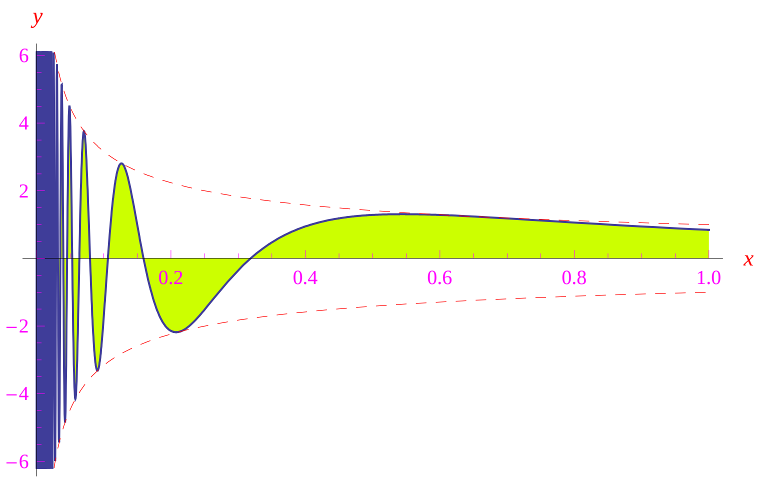
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Integrali generalizzati

Marcello Colozzo



Indice

Capitolo 1

Integrali generalizzati

1.1 Introduzione

Sia f una funzione reale definita in un intervallo X (limitato o illimitato) di $\mathbb{R}$. Come è noto, se f è continuta in X e X è limitato, ha un preciso significato l'integrale definito di f esteso a X:

$$\int_X f(x)\,dx \tag{1.1}$$

Ci proponiamo di estendere tale ente ad almeno uno dei seguenti casi (o entrambi):

1. f non è continua.
2. X è illimitato.

A tale scopo diamo la seguente definizione:

Definizione 1 *La funzione f si dice* **generalmente continua** *in X, se ogni intervallo limitato contenuto in X, contiene al più un numero finito di punti di discontinuità.*

Per ora consideriamo funzioni non negative, per poi estendere i risultati raggiunti alle funzioni di segno qualunque. Dalla definizione 1 segue che comunque prendiamo una funzione generalmente continua in X, è possibile costruire (in infiniti modi) un insieme finito di intervalli limitati contenuti in X, privi di punti di discontinuità e a due a due disgiunti. Ad esempio, si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \in (-1,1) \\ -x+4, & x \in (1,2) \\ \frac{1}{(x-3)^2}, & x \in (2,4) \end{cases} \tag{1.2}$$

Qui abbiamo i seguenti punti di discontinuità:

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 2,\ \xi_4 = 3$$

I punti ξ_1 e ξ_4 sono di discontinuità di prima specie, mentre ξ_2 e ξ_3 sono di discontinuità di seconda specie (singolarità). La funzione (1.2) è graficata in fig. 1.1, in cui è realizzata l'insieme degli intervalli privi di punti di discontinuità.

$$[a_1,b_1]\,,\ [a_2,b_2]\,,[a_3,b_3]$$

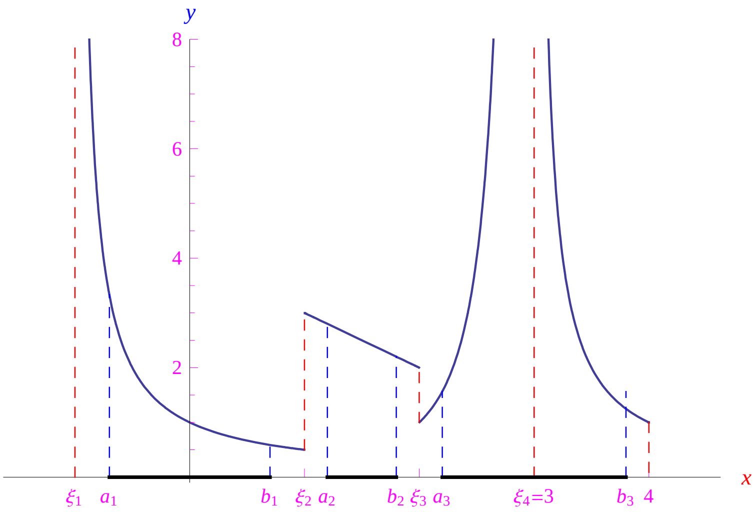


Figura 1.1: Grafico della funzione (1.2). Gli intervalli in grassetto sono di continuità per la funzione.

Nel caso di una funzione definita in un intervallo illimitato X, basta prendere ad arbitrio un intervallo limitato $X' \subset X$, per poi ripetere il procedimento appena visto. Quindi, in ogni caso abbiamo un insieme finito di intervalli:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n] \qquad \text{con } n \geq 1$$

tali che f è continua nella loro unione che denotiamo con T:

$$T = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k],$$

per cui ha senso l'integrale

$$\int_T f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \tag{1.3}$$

1.2 Definizione di integrale generalizzato. Rettangoloide generalizzato

Allo scopo di attribuire un significato preciso all'integrale di una funzione generalmente continua e non negativa, che conservi le proprietà dell'integrale di una funzione continua esteso a un intervallo limitato, dobbiamo considerare l'integrale (1.3) alla stregua di un valore approssimato per difetto del nuovo ente che vogliamo definire. Per quanto precede, l'insieme T (limitato) di continuità per la funzione f, può essere costruito in infiniti modi. Sussiste, quindi, la seguente definizione:

Definizione 2 *Dicesi integrale della funzione f generalmente continua e non negativa nell'intervallo X (limitato o illimitato), l'estremo superiore dell'insieme*

$$J = \left\{ \int_T f(x)\, dx \mid f \text{ è continua in } T \right\} \subseteq [0, +\infty) \tag{1.4}$$

Cioè

$$\int_X f(x)\,dx = \sup J \tag{1.5}$$

Ovviamente

$$0 \le \sup J \le +\infty \tag{1.6}$$

Tale definizione suggerisce di esprimere l'integrale di una funzione generalmente continua e non negativa esteso a un intervallo X, attraverso un'operazone di passaggio al limite. Precisamente, generiamo una successione di insiemi:

$$T_1, T_2, ..., T_n, ... \tag{1.7}$$

tali che f è continua in T_k per $k = 1, 2, ..., n, ...$, e

$$T_n \subseteq T_{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = X \tag{1.8}$$

Da ciò segue

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx \tag{1.9}$$

Tale risultato suggerisce la definizione seguente:

Definizione 3 *Dicesi* **rettangoloide generalizzato** *di base X e relativo alla funzione f, l'insieme dei punti:*

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \quad 0 \le y \le f(x)\right\} \tag{1.10}$$

Dal momento che f è generalmente continua, il rettangoloide generalizzato può essere un insieme illimitato. Non lo è, per una funzione con punti di discontinuità di prima specie, e definita in un intervallo limitato.

Esempio 4 *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{1.11}$$

manifestamente definita in $X = (-1, 1)$, con il seguente comportamento agli estremi di X:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty \tag{1.12}$$

Inoltre è $f(x) \ge 0$, per cui possiamo applicare la definizione di integrale esteso all'intervallo X. A tale scopo assumiamo come successione $\{T_n\}$ quella il cui termine n-esimo è

$$T_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right),$$

cosicché

$$\lim_{n\to\infty} T_n = X$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\arcsin\frac{1}{x}\right]_{x=-1+\frac{1}{n}}^{x=1-\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(-1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi
\end{aligned}$$

Cioè

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

cosicchè il rettangoloide

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

è un insieme illimitato ma di misura finita:

$$mis\mathcal{R} = \pi$$

Il grafico della funzione è riportato in 1.2.

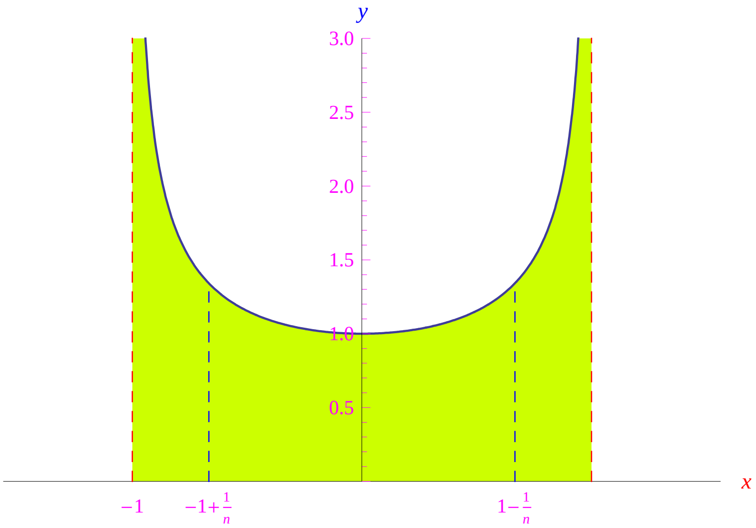


Figura 1.2: Grafico della funzione (1.11).

Di seguito un esempio di insieme illimitato di misura infinita.

Esempio 5 *Consideriamo il rettangoloide di base* $[0,1]$ *relativo alla funzione*

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \tag{1.13}$$

Cioè

$$\mathcal{R} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq \frac{1}{e^x - 1} \right\},$$

giacché la funzione assegnata è positiva. Risulta

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Prendiamo la successione di intervalli $\{T_n\}$*, dove*

$$T_n = \left(\frac{1}{n}, 1 \right],$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = (0,1]$$

e

$$mis\mathcal{R} = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^1 \frac{dx}{e^x - 1}$$

Calcoliamo a parte

$$\int_{1/n}^1 \frac{dx}{e^x - 1} = \int_{1/n}^1 \frac{e^{-x}dx}{1 - e^{-x}} = \ln\left|1 - e^{-x}\right|_{x=\frac{1}{n}}^{x=1} = \ln\left(\frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1/n}}\right),$$

cosicché

$$mis\mathcal{R} = +\infty \tag{1.14}$$

Il grafico della funzione è riportato in 1.3.

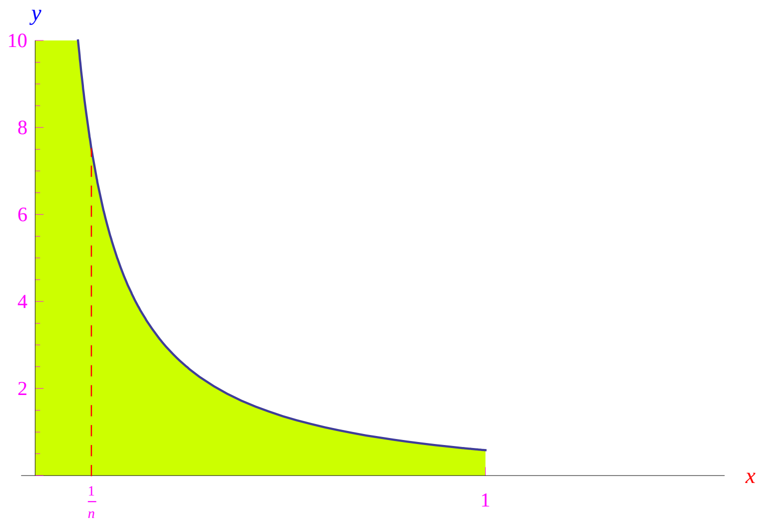


Figura 1.3: Grafico della funzione (1.13).

Ne concludiamo che nel caso di $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ ristretta a $(0,1]$, il corrispondente rettangoloide generalizzato è illimitato e di misura infinita.

Esempio 6 *Consideriamo il rettangoloide generalizzato di base $\mathbb{R}$, relativo alla funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \tag{1.15}$$

ovvero l'insieme di punti

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in R^2 \mid -\infty < x < +\infty,\ \ 0 < y \leq \frac{1}{1 + x^2}\right\}, \tag{1.16}$$

giacché è $f(x) > 0$ in tutto $\mathbb{R}$ (il grafico è riportato in fig. 1.4).

Assumiamo come successione di domini convergente all'intervallo di integrazione, la successione il cui termine n-esimo è

$$T_n = [-n, n],$$

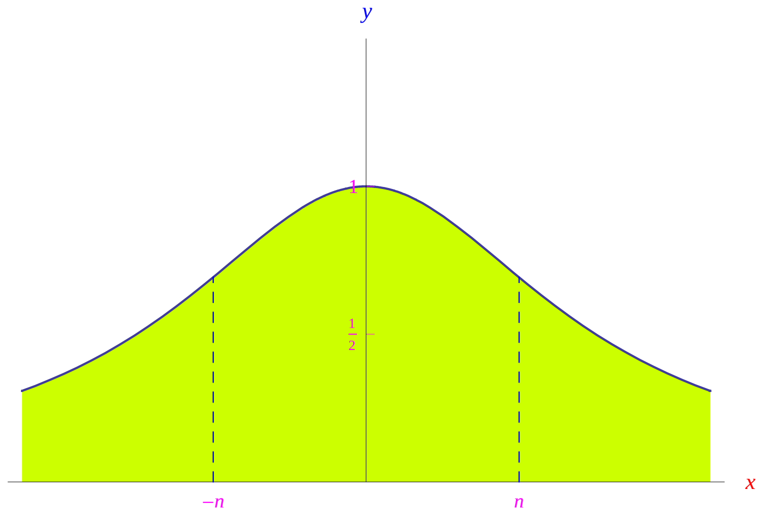


Figura 1.4: Grafico della funzione (1.15).

onde

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = (-\infty, +\infty)$$

e

$$\begin{aligned} mis\mathcal{R} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \left[\arctan(n) - \arctan(-n)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Ne concludiamo che il predetto rettangoloide è un insieme illimitato di misura finita.

Esempio 7 *Determiniamo la misura del rettangoloide generalizzato $\mathcal{R}$ di base $[0, +\infty)$ relativo alla funzione $f(x) = e^{-x}$. A tale scopo fissiamo la seguente successione di intervalli*

$$T_n = [0, n],$$

per cui

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} T_n = [0, +\infty) \Longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-x} dx \\ &= -\lim_{n\to+\infty} e^{-x}\Big|_{x=0}^{x=n} = -\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-n} - 1\right) = 1 \end{aligned}$$

Cioè

$$mis(\mathcal{R}) = 1 \tag{1.17}$$

Esempio 8 *Studiamo l'integrale*

$$I(h) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha}, \tag{1.18}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre h, α sono parametri reali e positivi. Si tratta, dunque, di studiare l'integrabilità della funzione positiva

$$f(x) = \frac{1}{|x - x_0|^\alpha} \tag{1.19}$$

nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h]$. *Tale funzione è graficata in fig. 1.5. Evidentemente:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

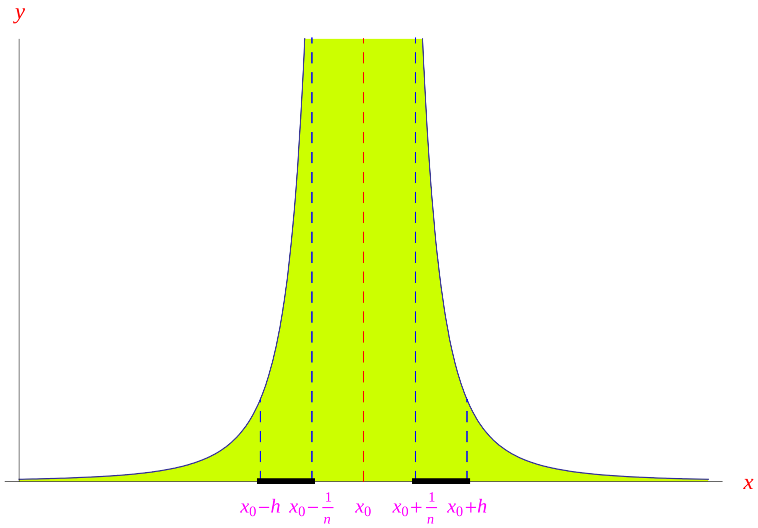


Figura 1.5: Grafico della funzione (1.19).

Prendiamo la successione di intervalli $\{T_n\}$*; per essere più precisi,* T_n *è l'unione di due intervalli:*

$$T_n = \left[x_0 - h, x_0 - \frac{1}{n}\right) \cup \left(x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + h\right], \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Segue

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = [x_0 - h, x_0 + h]$$

e

$$\begin{aligned} I(h) &= \lim_{n \to +\infty} \int_{T_n} f(x) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \left[\underbrace{\int_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha}}_{=I_1} + \underbrace{\int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h} \frac{dx}{|x - x_0|^\alpha}}_{=I_2} \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due integrali:

$$I_1 = \int_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}} \frac{dx}{(x - x_0)^\alpha}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$\begin{aligned} t &= x_0 - x \Longrightarrow dt = -dx \\ x_0 - h \leq x = x_0 - t &\leq x_0 - \frac{1}{n} \Longrightarrow -h \leq -t \leq -\frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow h \geq t \geq \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

onde

$$I_1 = -\int_h^{1/n} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_{1/n}^h \frac{dt}{t^\alpha} \tag{1.20}$$

Per $\alpha \neq 1$

$$I_1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

Per $\alpha = 1$

$$I_1 = [\ln |t|]_{t=1/n}^{t=h} = \ln (nh)$$

Riassumendo

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right), & se\ \alpha \neq 1 \\ \ln (nh)\,, & se\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

Passiamo all'altro integrale, che può essere scritto come

$$I_2 = \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = x - x_0 \Longrightarrow dt = dx$$
$$x_0 + \frac{1}{n} = x = t + x_0 \leq x_0 + h \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq t \leq h,$$

per cui

$$I_2 = \int_{1/n}^h \frac{dt}{t^{-\alpha}}$$

Per $\alpha \neq 1$

$$I_2 = \frac{1}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

Per $\alpha = 1$

$$I_2 = [\ln t]_{t=1/n}^{t=h} = \ln (nh)$$

Riassumendo

$$I_2 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right), & se\ \alpha \neq 1 \\ \ln (nh)\,, & se\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{1.22}$$

Poniamo

$$I_n = I_1 + I_2 = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right), & se\ \alpha \neq 1 \\ 2\ln (nh)\,, & se\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Segue

$$I(h) = \lim_{n\to+\infty} I_n = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\right), & se\ \alpha \neq 1 \\ +\infty, & se\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Osservando che

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & se\ \alpha < 1 \\ +\infty, & se\ \alpha > 1 \end{cases},$$

si ha per $\alpha > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{1-\alpha}\left(h^{1-\alpha} - n^{\alpha-1}\right) = \frac{2}{\underbrace{1-\alpha}_{<0}}(-\infty) = +\infty$$

Conclusione

$$I(h) = \begin{cases} \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha} > 0, & se\ \alpha < 1 \\ +\infty, & se\ \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

Completiamo lo studio precedente con quest'altro esempio

Esempio 9 *Studiamo l'integrale*

$$I(h) = \int_{x_0+h}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}, \tag{1.24}$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$, *mentre* h, α *sono parametri reali e positivi. Si tratta, dunque, di studiare l'integrabilità della funzione positiva*

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^\alpha} \tag{1.25}$$

nell'intervallo $[x_0+h, +\infty)$. *Tale funzione è graficata in fig. 1.6. Evidentemente:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Inoltre, la funzione è continua nel predetto intervallo.

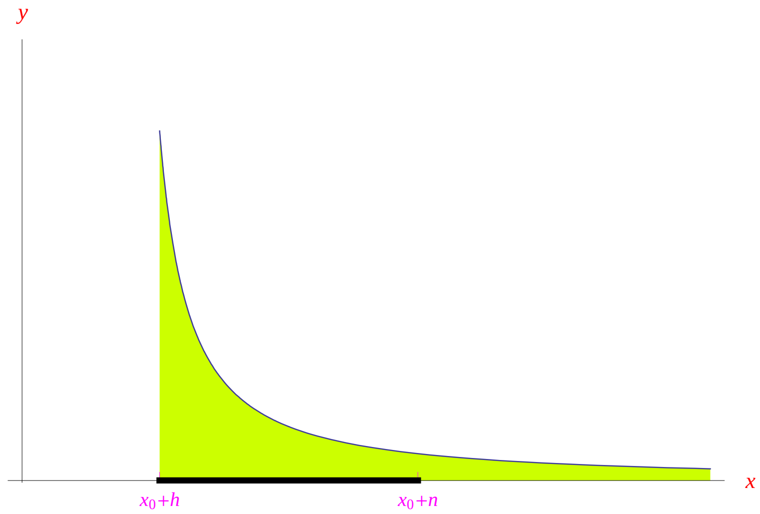


Figura 1.6: Grafico della funzione (1.25).

Prendiamo la successione di intervalli $\{T_n\}$ *come mostrato in fig. 1.6. Cioè*

$$T_n = [x_0+h, x_0+n]$$

Segue

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = [x_0+h, +\infty)$$

e

$$I(h) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\int_{x_0+h}^{x_0+n} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha}}_{\stackrel{def}{=} I_n(x)}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = x - x_0 \Longrightarrow dx = dt$$
$$x_0 + h \leq x = t + x_0 \leq x_0 + h$$
$$\Longrightarrow h \leq t \leq n,$$

onde

$$I_n(x) = \int_h^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

Segue

$$\alpha = 1 \Longrightarrow I_n(x) = [\ln|t|]_h^n = \ln\left(\frac{n}{h}\right)$$
$$0 < \alpha \neq 1 \Longrightarrow I_n(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}\right)$$

Eseguendo il limite per $n \to +\infty$:

$$\int_{x_0+h}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \begin{cases} \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1}, & se\ \alpha > 1 \\ +\infty, & se\ \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

Cioè il rettangoloide generalizzato di base $[x_0 + h, +\infty)$, relativo alla funzione assegnata, è un insieme illimitato che ha area finita se $\alpha > 1$, area infinita se $\alpha \geq 1$.

Alla medesima conclusione si perviene per l'integrale

$$\int_{-\infty}^{x_0-h} \frac{dx}{(x_0-x)^\alpha}$$

Concludiamo questo numero con le seguenti definizioni:

Definizione 10 *Una funzione generalmente continua in un intervallo X (limitato o illimitato) si dice* **integrabile**, *se comunque prendiamo una successione di intervalli $\{T_n\}$ tali che*

$$T_n \subseteq T_{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} T = X,$$

è univocamente determinato il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx,$$

*che è l'***integrale generalizzato** *di f esteso all'intervallo X, ossia*

$$\int_X f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx,$$

risultando[1]

$$\left|\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx\right| \leq +\infty$$

Nel caso particolare

$$\left|\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx\right| < +\infty,$$

la funzione si dice **sommabile**.

[1]Nel caso particolare di una funzione non negativa, si ha ovviamente $\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx \leq +\infty$.

Osservazione 11 *Per determinazione univoca intendiamo che il limite*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{T_n} f(x)\,dx$$

è indipendente dalla successione $\{T_n\}$. Cioè, se prendiamo due successioni distinte

$$\{T_n\} \mid T_n \subseteq T_{n+1},\ \lim_{n\to+\infty} T_n = X$$
$$\{T'_n\} \mid T'_n \subseteq T'_{n+1},\ \lim_{n\to+\infty} T'_n = X,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{T_n} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{T'_n} f(x)\,dx$$

Per quanto precede, le funzioni generalmente continue e non negative in X (limitato o illimitato) sono comunque integrabili. Cioè

$$\exists \int_X f(x)\,dx \leq +\infty, \quad \begin{array}{c}\forall f \text{ generalmente continua in } X \\ \text{e non negativa in } X\end{array}$$

1.3 Funzioni di segno variabile

La questione dell'integrabilità diviene più complicata se f non ha segno costante in X. In tal caso, conviene definire le funzioni:

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}, \tag{1.27}$$

entrambe non negative in X. Dalle (1.27):

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \tag{1.28}$$

che decompone univocamente una qualunque funzione f nelle due parti non negative f_1, f_2. Evidentemente

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{per } x \in X \mid f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{per } x \in X \mid f(x) \leq 0 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{per } x \in X \mid f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{per } x \in X \mid f(x) \geq 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Denotiamo con $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ i rettangoloidi generalizzati relativi a f_1 e f_2 e di base X:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ 0 \leq y \leq f_1(x)\right\} \\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ 0 \leq y \leq f_2(x)\right\} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Se $\mathcal{R}$ è il rettangoloide generalizzato relativo a f e di base X:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2 \tag{1.31}$$

dove

$$\bar{\mathcal{R}}_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ -f_2(x) \leq y \leq 0\right\},$$

cioè il simmetrico di $\mathcal{R}_2$ rispetto all'asse x. A titolo di esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{1}{1-x}, & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}, \tag{1.32}$$

il cui grafico è riportato in fig. 1.7. Risulta

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in (0,1) \\ 0, & \text{se } x \in (1,2] \end{cases} \tag{1.33}$$

e

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0,1) \\ \frac{1}{x-1}, & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}, \tag{1.34}$$

graficate nelle figg. 1.8–1.9.

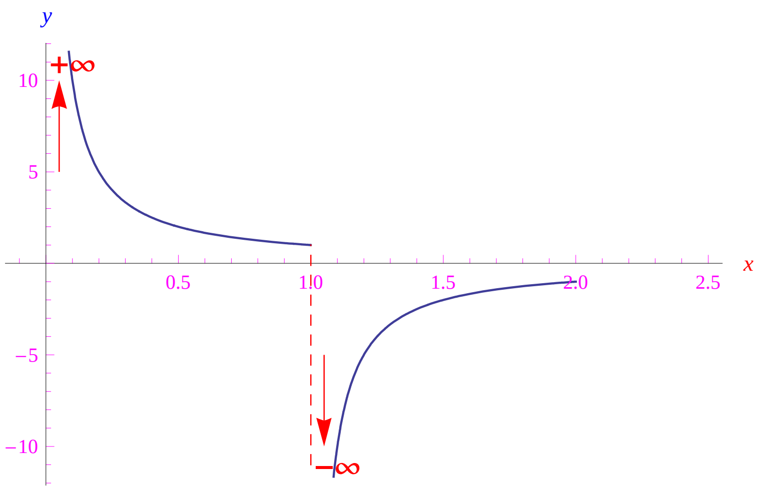


Figura 1.7: Grafico della funzione (1.32).

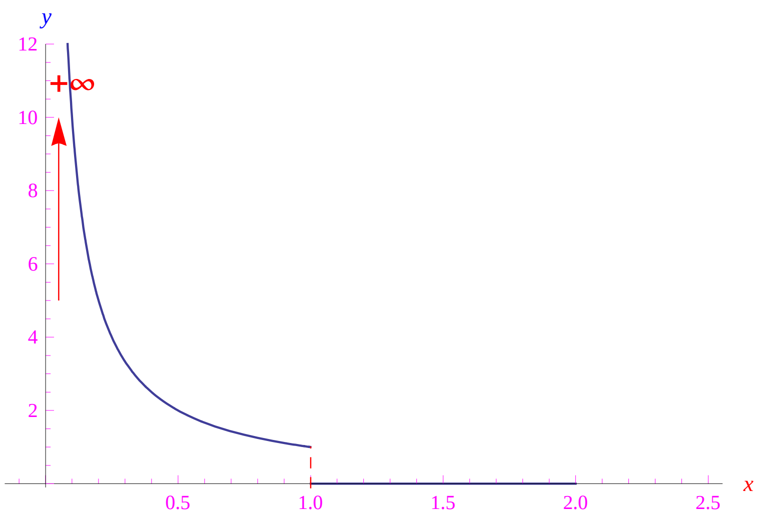


Figura 1.8: Grafico della funzione (1.33).

Osserviamo che passando da $f(x)$ a $f_1(x)$ e $f_2(x)$, i punti di discontinuità possono cambiare specie, o divenire punti di continuità per la funzione. Ad esempio, $x = 1$ è punto

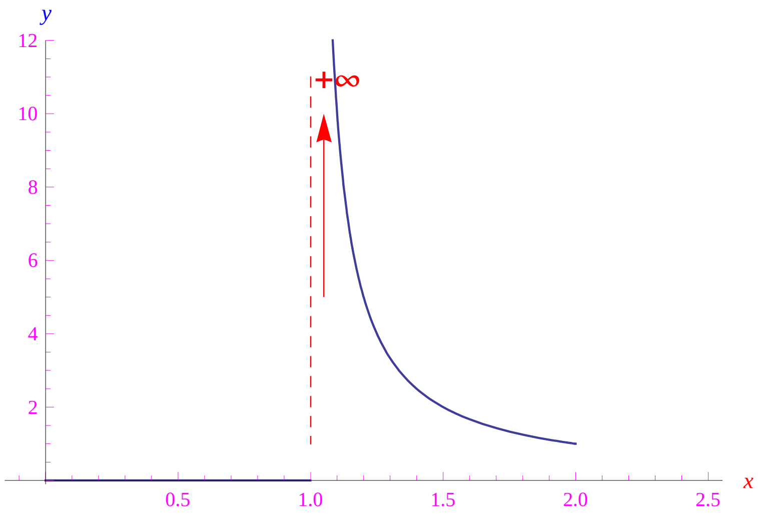


Figura 1.9: Grafico della funzione (1.33).

di discontinuità di seconda specie per f, ma è di prima specie per f_1. Il punto $x = 0$ è di discontinuità di seconda specie per f, ma è punto di continuità per f_2.

Risulta:

$$\mathcal{R}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \ 0 < y \leq \frac{1}{x} \right\} \tag{1.35}$$

$$\mathcal{R}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x \leq 2, \ 0 < y \leq \frac{1}{x - 1} \right\},$$

per cui

$$\bar{\mathcal{R}}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x \leq 2, \ \frac{1}{1 - x} \leq y < 0 \right\} \tag{1.36}$$

Pertanto $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2$, come illustrato in fig. 1.10.

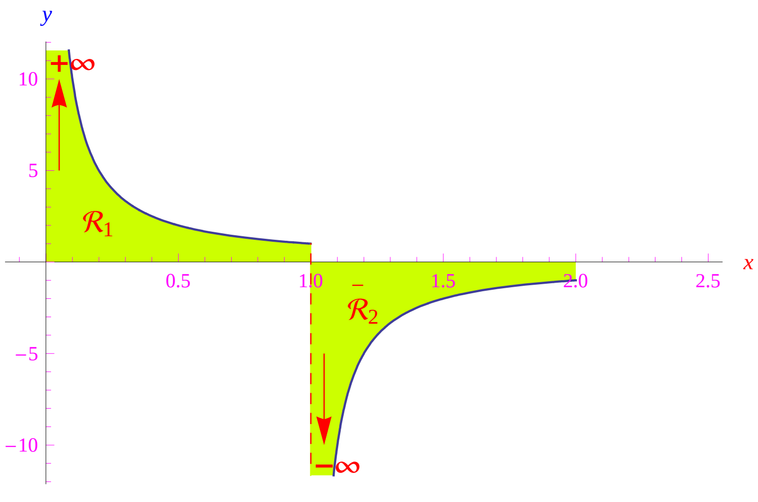


Figura 1.10: Rettangoloide generalizzato relativo ala funzione (1.32). Qui $\bar{\mathcal{R}}_2$ è il simmetrico del rettangoloide relativo a $f_2(x)$.

La (1.28) suggerisce

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X f_1(x)\,dx - \int_X f_2(x)\,dx, \tag{1.37}$$

giacchè

$$f_k(x) \geq 0 \Longrightarrow \exists \int_X f_k(x)\,dx \leq +\infty, \quad (k = 1, 2) \tag{1.38}$$

in quanto f_k è non negativa. Ne consegue che la (1.37) è applicabile solo nei casi in cui almeno uno degli integrali (1.38) è $< +\infty$. Infatti se

$$\int_X f_1(x)\,dx = +\infty, \quad \int_X f_2(x)\,dx = +\infty \tag{1.39}$$

la (1.37) si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$, per cui la definizione (1.37) diviene priva di significato. Geometricamente significa che almeno uno dei rettangoloidi (1.30) deve avere area finita.

Consideriamo, ad esempio, il problema dell'integrabilità della funzione

$$f(x) = e^{-x} \sin x \tag{1.40}$$

nell'intervallo $X = [0, +\infty)$. Osserviamo innanzitutto

$$|f(x)| = \underbrace{|e^{-x}|}_{=e^{-x}}\underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \leq e^{-x} \Longrightarrow -e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x} \tag{1.41}$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(-e^{-x}\right) = 0,$$

per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{1.42}$$

Inoltre, sempre dalla doppia disuguaglianza (1.41) segue che il diagramma cartesiano della funzione

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad y = e^{-x} \sin x\right\} \tag{1.43}$$

è contenuto nella regione del piano cartesiano

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \quad -e^{-x} \leq y \leq e^{-x}\right\} \tag{1.44}$$

In parole semplici, la funzione oscilla sinusoidalmente tra le curve esponenziali e^{-x} ed $-e^{-x}$, come illustrato in fig. 1.11.

La funzione (1.40) si annulla infinite volte e i suoi zeri sono:

$$x_k = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{1.45}$$

per cui cambia infinite volte segno. Le funzioni (1.27) sono

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} \sin x, & \text{per } \sin x \geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad ; \quad f_2(x) = \begin{cases} -e^{-x} \sin x, & \text{per } \sin x < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1.46}$$

Riesce

$$\mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2 \subset \mathcal{R}_{e^{-x}}, \tag{1.47}$$

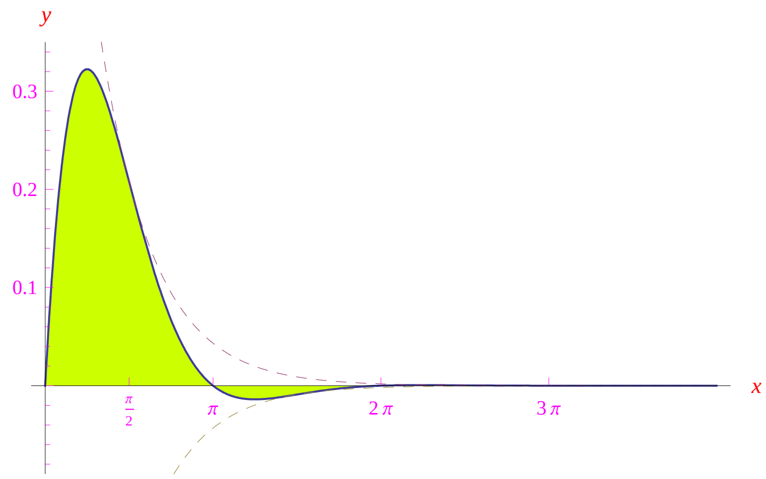


Figura 1.11: Grafico della funzione (1.40). Per $x > 2\pi$ le oscillazioni non sono visibili, in quanto l'ampiezza è molto minore dell'ampiezza nell'intervallo precedente.

essendo $\mathcal{R}_{e^{-x}}$ il rettangoloide generalizzato relativo a e^{-x} di base $[0, +\infty)$. Per una nota proprietà della misura segue

$$mis\left(\mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2\right) < mis\left(\mathcal{R}_{e^{-x}}\right) \tag{1.48}$$

Dall'esempio 7, si ha

$$mis\left(\mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_2\right) < 1 \tag{1.49}$$

Per la proprietà additiva della misura la (1.49) si scrive:

$$mis\left(\mathcal{R}_1\right) + mis\left(\bar{\mathcal{R}}_2\right) < 1$$

Ma

$$mis\left(\bar{\mathcal{R}}_2\right) = mis\left(\mathcal{R}_2\right),$$

onde

$$mis\left(\mathcal{R}_1\right) + mis\left(\mathcal{R}_2\right) < 1 \Longleftrightarrow mis\left(\underbrace{\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2}_{=\mathcal{R}}\right) < 1, \tag{1.50}$$

da cui la sommabilità della funzione assegnata. A questo punto possiamo calcolare l'integrale con il solito procedimento di passaggio al limite:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \lim_{a \to +\infty} I\left(a\right), \tag{1.51}$$

dove

$$I\left(a\right) = \int_0^a e^{-x} \sin x dx$$

Procediamo per parti:

$$\begin{aligned} I\left(a\right) &= -\left[e^{-x} \cos x\right]_0^a - \int_0^a e^{-x} \cos x dx \\ &= -\left(e^{-a} \cos a - 1\right) - I_1\left(a\right), \end{aligned} \tag{1.52}$$

dove

$$I_1(a) = \int_0^a e^{-x} \cos x dx$$

Di nuovo per parti

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \left[e^{-x} \sin x\right]_0^a + \int_0^a e^{-x} \sin x dx \\ &= e^{-a} \sin a + I(a), \end{aligned} \tag{1.53}$$

che sostituita in (1.52):

$$I(a) = 1 - e^{-a} (\sin a + \cos a) - I(a)$$

Risolvendo rispetto a $I(a)$:

$$I(a) = \frac{1}{2} \left[1 - e^{-a} (\sin a + \cos a)\right],$$

onde

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \lim_{a \to +\infty} \left[1 - e^{-a} (\sin a + \cos a)\right]$$

Ma

$$\lim_{a \to +\infty} \left[1 - e^{-a} (\sin a + \cos a)\right] = 0,$$

onde

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \tag{1.54}$$

***

Consideriamo ora questo esempio: integrabilità in $[0, +\infty)$ della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{100}} \sin x, & x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \\ e^{-\frac{x}{10}} \sin x, & x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] \end{cases} \tag{1.55}$$

in $[0, +\infty)$. Risulta:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n\pi, (2n+1)\pi] &= [0, \pi] \cup [2\pi, 3\pi] \cup [4\pi, 5\pi] \cup ... \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] &= [\pi, 2\pi] \cup [3\pi, 4\pi] \cup [5\pi, 6\pi] \cup ..., \end{aligned} \tag{1.56}$$

per cui

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0, \quad \forall x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \\ f(x) &\leq 0, \quad \forall x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi] \end{aligned} \tag{1.57}$$

Più precisamente:

$$0 \leq f(x) \leq e^{\frac{x}{100}}, \quad \forall x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n\pi, (2n+1)\pi] \tag{1.58}$$
$$-e^{-\frac{x}{10}} \leq f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$$

La funzione (1.55) è continua ed ha un'infinità numerabile di zeri, per cui cambia segno un numero infinito di volte. Il grafico è riportato in fig. 1.12. Intuitivamente, vediamo che il rettangoloide $\mathcal{R}_1$ è l'unione di una successione infinita di rettangoloidi di misura progressivamente crescente. Di contro, il rettangoloide $\mathcal{R}_2$ pur essendo l'unione di infiniti rettangoloidi, ha area nulla giacché i rettangoloidi componenti sono progressivamente schiacciati sull'asse x, per cui ci aspettiamo:

$$mis(\mathcal{R}_1) = +\infty, \; mis(\mathcal{R}_2) = 0 \Longrightarrow mis(\mathcal{R}) = +\infty \tag{1.59}$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è integrabile ma non sommabile in $[0, +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \tag{1.60}$$

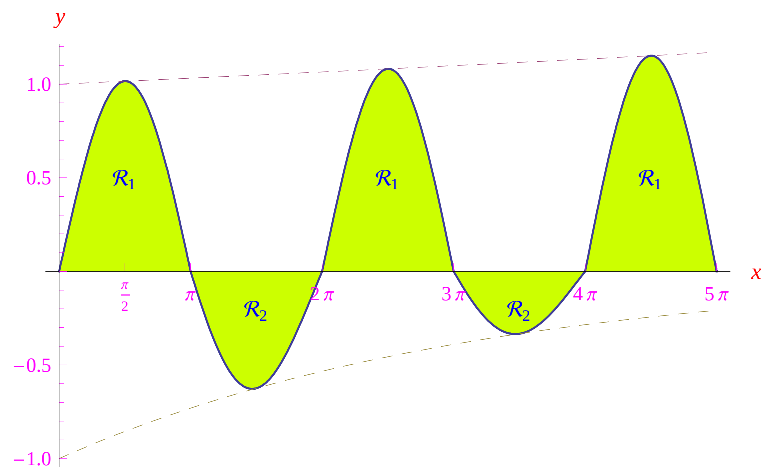


Figura 1.12: Grafico della funzione (1.55), da cui vediamo i punti angolosi $(k\pi, 0)$.

***

Studiamo l'integrabilità in $[0, +\infty)$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{1.61}$$

Tale funzione è manifestamente continua ed è graficata in fig. 1.13, essendo

$$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq y \leq f_1(x)\right\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < +\infty, \quad -f_2(x) \leq y \leq 0\right\},$$

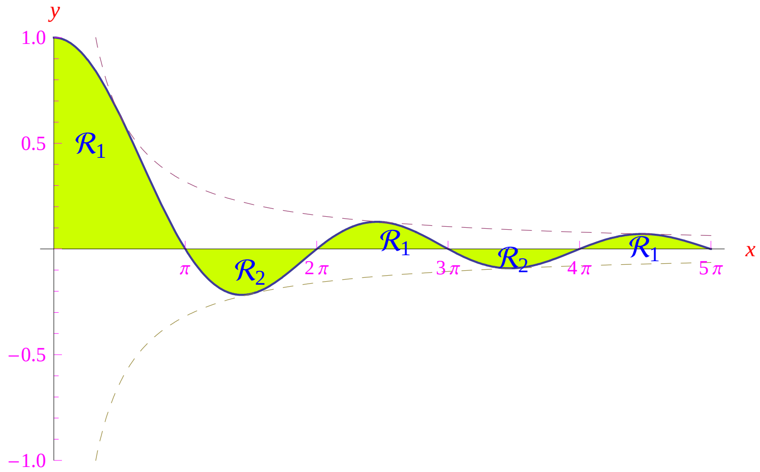


Figura 1.13: Grafico della funzione (1.61).

dove

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & \text{se } f(x)\geq 0 \\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}, \quad f_2(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{se } f(x)\leq 0 \\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Per essere più specifici, definiamo

$$V_k \stackrel{def}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad 0\leq y \leq \frac{\sin x}{x}\right\},$$

con $k=0,1,...,N-1$, essendo N un intero positivo preso ad arbitrio. Riesce:

$$\mathcal{R}_1 \supset \bigcup_{k=0}^{N-1} V_k, \quad \forall N\in\mathbb{N}-\{0\} \Longrightarrow mis\,(\mathcal{R}_1) > \sum_{k=0}^{N-1} mis\,(V_k) \tag{1.62}$$

Definiamo

$$W_k \stackrel{def}{=} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2k\pi+\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi+\frac{5\pi}{6}, \quad 0\leq y \leq \frac{\sin x}{x}\right\}$$

Se ora ci aiutiamo con la fig. 1.14 vediamo che

$$W_k \subset V_k, \quad \text{con } k=0,1,2,...,N$$

Ne consegue

$$mis\,(\mathcal{R}_1) > \sum_{k=0}^{N-1} mis\,(V_k) > \sum_{k=0}^{N-1} mis\,(W_k)$$

A questo punto osserviamo che

$$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{6}, 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right] \Longrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}, \quad x \leq 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

Manipoliamo l'ultimo termine:

$$x \leq 2k\pi+\frac{5\pi}{6} = \pi\left(2k+\frac{5}{6}\right) < \pi\,(2k+1),$$

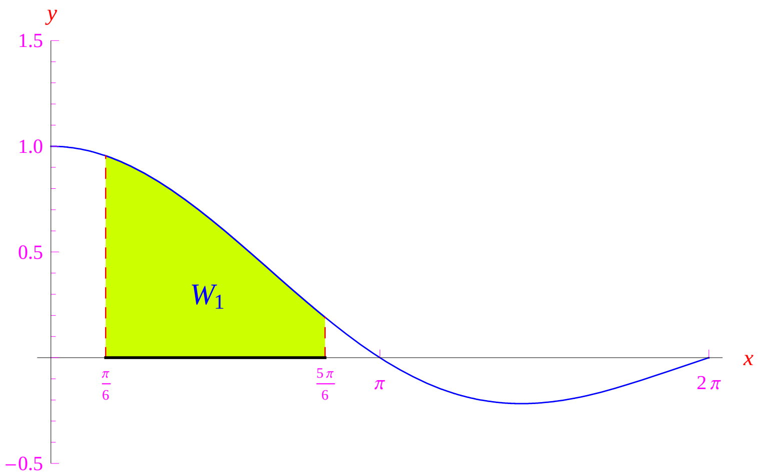


Figura 1.14: $W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sin x}{x}\right\}$

per cui

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{1}{2\pi\,(2k+1)} > \frac{1}{4\pi\,(k+1)}, \quad \forall x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$$

Quindi

$$mis\,(\mathcal{R}_1) > \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{4\pi\,(k+1)} \int_{2k\pi+\frac{\pi}{6}}^{2k\pi+\frac{5\pi}{6}} dx = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1},$$

cioè

$$mis\,(\mathcal{R}_1) > \frac{1}{6} S_N,$$

dove

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$$

ovvero la somma parziale di ordine N della serie armonica. Come è noto, tale serie diverge

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Quindi

$$mis\,(\mathcal{R}_1) > \frac{1}{6} S, \quad \forall S > 0$$

il che equivale a scrivere

$$mis\,(\mathcal{R}_1) = +\infty \tag{1.63}$$

Applicando un procedimento simile a $\mathcal{R}_2$, si perviene a

$$mis\,(\mathcal{R}_2) = +\infty \tag{1.64}$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata non è integrabile in $[0, +\infty)$.

1.4 Funzioni sommabili e proprietà dei loro integrali

Per quanto stabilito nei numeri precedenti, una funzione generalmente continua in un intervallo X (limitato o illimitato), si dice **integrabile** in X, se è possibile determinare univocamente l'ente denominato **integrale generalizzato**

$$\int_X f(x)\,dx$$

che sia in grado di inglobare la definizione di integrale definito. Si noti che

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leq +\infty$$

Nel caso particolare

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| < +\infty$$

diremo che f è **sommabile** in X. Ne consegue che la sommabilità di una funzione è una condizione più forte dell'integrabilità. Il seguente teorema esprime una condizione necessaria e sufficiente per la sommabilità di una funzione:

Teorema 12

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \ \textit{è sommabile} \\ \textit{in } X \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} |f(x)| \ \textit{è sommabile} \\ \textit{in } X \end{array}\right.$$

Dimostrazione. La condizione è sufficiente

Dopo aver introdotto le solite funzioni non negative (cfr. eq. (1.65))

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}, \tag{1.65}$$

prendiamo ad arbitrio

$$T \subseteq X \mid T \text{ è misurabile ed è di continuità per } f$$

Segue

$$\int_T f_1(x)\,dx \leq \int_X f_1(x)\,dx, \quad \int_T f_2(x)\,dx \leq \int_X f_2(x)\,dx \tag{1.66}$$

Dalle (1.65):

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad |f(x)| = f_1(x) - f_2(x) \tag{1.67}$$

Per ipotesi $f(x)$ è sommabile in X, per cui tali saranno le $f_k(x)$:

$$\int_X f_1(x)\,dx < +\infty, \quad \int_X f_2(x)\,dx < +\infty \tag{1.68}$$

Dalle seconde delle (1.67)

$$\int_T |f(x)|\,dx = \int_T f_1(x)\,dx + \int_T f_2(x)\,dx \leq \underbrace{\int_X f_1(x)\,dx}_{<+\infty} + \underbrace{\int_X f_2(x)\,dx}_{<+\infty} \tag{1.69}$$

Cioè

$$\int_T |f(x)|\,dx < +\infty, \quad \forall T \subseteq X$$

Segue

$$\sup J < +\infty, \tag{1.70}$$

essendo

$$J = \left\{ \int_T |f(x)|\,dx \mid T \text{ è misurabile ed è di continuità per } f \right\}$$

Ma

$$\sup J = \int_X |f(x)|\,dx,$$

onde l'asserto.

Passiamo all'implicazione inversa. Ora l'ipotesi è

$$\int_X |f(x)|\,dx < +\infty \tag{1.71}$$

Prendendo nuovamente T misurabile, contenuto in X e di continuità per $f(x)$, si ha

$$\int_T |f(x)|\,dx \leq \int_X |f(x)|\,dx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \int_T f_1(x)\,dx + \int_T f_2(x)\,dx \leq \int_X |f(x)|\,dx < +\infty$$

Definiamo

$$J_k = \left\{ \int_T |f_k(x)|\,dx \mid T \text{ è misurabile ed è di continuità per } f \right\}, \quad (k = 1, 2),$$

onde

$$\sup J_k < +\infty$$

Ma

$$\sup J_k = \int_X f_k(x)\,dx,$$

cioè le funzioni non negative $f_k(x)$ sono sommabili. Ciò implica la sommabilità di $f(x)$. ■

Il teorema appena dimostrato è di scarsa utilità nei casi pratici. Tuttavia, permette di dimostrare delle condizioni sufficienti di di sommabilità, attravero la formulazione di tre criteri.

Criterio 13 *Sia*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

una funzione generalmente continua in $X \subseteq \mathbb{R}$. Se X è limitato e $f(x)$ è limitata, allora $f(x)$ è ivi sommabile.

Dimostrazione. Se $f(x)$ è limitata, comunque prendiamo $T \subseteq X$ che sia di continuità per $f(x)$, si ha:

$$\exists M > 0 \mid |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in T,$$

onde
$$\int_T |f(x)|\,dx \leq M mis(T) \leq M mis(X) < +\infty \tag{1.72}$$
Posto
$$J = \left\{ \int_T |f(x)|\,dx \mid T \subseteq X \right\},$$
si ha dalla (1.72)
$$\int_X |f(x)|\,dx \leq +\infty,$$
onde l'asserto (dal teorema 12). ■

Criterio 14 *Siano*
$$f : X \to \mathbb{R}, \quad g : X \to \mathbb{R} \tag{1.73}$$
generalmente continue in $X \subseteq \mathbb{R}$ (limitato o illimitato), e tali che
$$|f(x)| \leq |g(x)|, \quad \forall x \in X \tag{1.74}$$
Segue
$$\begin{gathered}\left.\begin{array}{c} g(x) \text{ è sommabile} \\ \text{in } X \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} f(x) \text{ è sommabile} \\ \text{in } X \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{c} f(x) \text{ non è sommabile} \\ \text{in } X \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} g(x) \text{ non è sommabile} \\ \text{in } X \end{array}\right.\end{gathered} \tag{1.75}$$

Dimostrazione. Fissiamo ad arbitrioi una successione $\{T_n\}$ di sottoinsiemi di X che siano di continuità per f e g:
$$T_n \subseteq T_{n+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = X$$
Segue
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} |f(x)|\,dx = \int_X |f(x)\,dx| \tag{1.76}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} |g(x)|\,dx = \int_X |g(x)\,dx|$$
e
$$|f(x)| \leq |g(x)| \Longrightarrow \int_{T_n} |f(x)|\,dx \leq \int_{T_n} |g(x)|\,dx \tag{1.77}$$
Eseguendo in quest'ultima l'operazione di passaggio al limite per $n \to +\infty$
$$\int_X |f(x)|\,dx \leq \int_X |g(x)|\,dx \tag{1.78}$$
Se $g(x)$ è sommabile, lo è anche $|g(x)|$ (per il teorema 12), onde
$$\int_X |f(x)|\,dx \leq \int_X |g(x)|\,dx < +\infty \Longrightarrow \int_X |f(x)|\,dx < +\infty,$$
da cui la sommabilità di $f(x)$ in X. Se, invece, $f(x)$ non è sommabile in X, non lo è nemmeno $|f(x)|$ ma riesce comunque integrabile, giacché è una funzione non negativa in X. Quindi:
$$+\infty = \int_X |f(x)|\,dx \leq \int_X |g(x)|\,dx \Longrightarrow \int_X |g(x)|\,dx = +\infty,$$
onde l'asserto. ■

Criterio 15 *Sia $f(x)$ generalmente continua in $X \subseteq \mathbb{R}$ (limitato o illimitato).*

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ è sommabile} \\ \text{in } X \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f(x) \text{ è sommabile} \\ \text{in } X', \ \forall X' \subseteq X \end{array}\right.$$

$$\exists X' \subseteq X \mid f(x) \text{ non è sommabile in } X \Longrightarrow f(x) \text{ non è sommabile in } X$$

Dimostrazione. Fissato ad arbitrio $X' \subseteq X$, denotiamo con $T \subseteq X'$ un qualunque intervallo di continuità per $f(x)$. Segue

$$T \subseteq X' \subseteq X \Longrightarrow \int_T |f(x)|\, dx \leq \int_X |f(x)|\, dx$$
$$\Longrightarrow \int_{X'} |f(x)|\, dx = \sup\left\{\int_T |f(x)|\, dx \mid T \subseteq X'\right\} \leq \int_X |f(x)|\, dx$$

Quindi

$$\int_X |f(x)|\, dx < +\infty \Longrightarrow \int_{X'} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

cioè la prima parte del teorema. Viceversa

$$\exists X' \subseteq X \mid \int_{X'} |f(x)|\, dx = +\infty,$$

si ha

$$+\infty = \sup\left\{\int_T |f(x)|\, dx \mid T \subseteq X'\right\} \leq \int_X |f(x)|\, dx$$
$$\Longrightarrow \int_X |f(x)|\, dx = +\infty$$

■

1.4.1 Nuovi criteri di sommabilità

Per lo svolgimento degli esercizi sono utili i seguenti criteri (sufficienti) in cui consideriamo una funzione reale f della variabile reale x e un intervallo limitato $[a, b]$.

Criterio 16 *Sia f continua in $[a, b] - \{x_0\}$, con x_0 punto di discontinuità di seconda specie.*

1. $\exists U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid |f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}$, $\forall x \in U_\delta(x_0) - \{x_0\}$, *con* $M > 0$ *e* $0 < \alpha < 1 \Longrightarrow f$ *è sommabile in* $[a, b]$
2. $\exists U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid |f(x)| \leq \frac{M}{|x - x_0|^\alpha}$, $\forall x \in U_\delta(x_0) - \{x_0\}$, *con* $M > 0$ *e* $\alpha \geq 1 \Longrightarrow f$ *è non sommabile in* $[a, b]$

Dimostrazione. Poniamo

$$g(x) = \frac{M}{|x - x_0|^\alpha} \tag{1.79}$$

Dall'esempio 8 si ha

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\, dx = \begin{cases} \frac{2M\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases},$$

da cui l'asserto 1 in virtù del criterio 14 del n. precedente. La parte 2 si dimostra in maniera analoga. ■

Esempio 17 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} \tag{1.80}$$

nell'intervallo $(0,1]$. *Il punto* $x=0$ *è di discontinuità di seconda specie, giacché la funzione non ammette limite per* $x \to 0$. *D'altra parte*

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| = \frac{\overbrace{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}^{\leq 1}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{1/2}},$$

da cui la sommabilità di f *nel predetto intervallo. In fig. 1.15 è graficata la funzione assegnata. Vediamo che il grafico è un'oscillazione sinusoidale modulata dalle curve* $y = \pm x^{1/2}$, *per cui in ogni intorno destro di* $x=0$ *la funzione compie infinite oscillazioni di ampiezza divergente per* $x \to 0$. *Tuttavia, l'area del rettangoloide generalizzato è finita. Precisamente, l'integrale si esprime attravero la funzione integrale di Fresnel*

$$\int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt,$$

trovando

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi}\left[1 - 2\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt\right] \simeq 0.5714$$

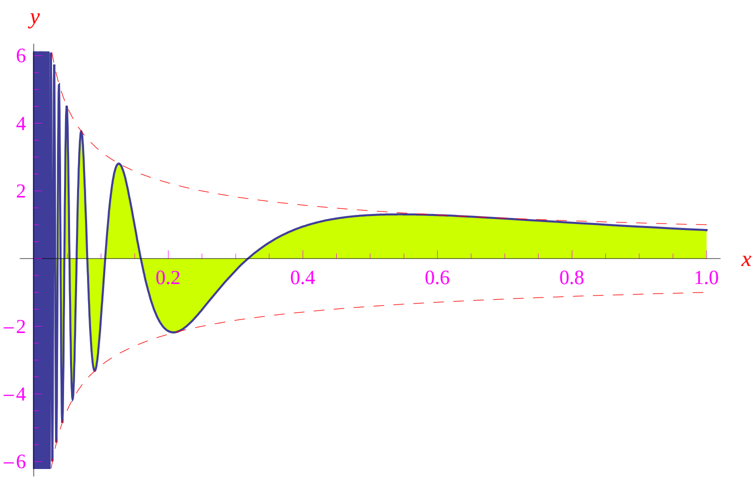


Figura 1.15: Grafico della funzione (1.80).

Esempio 18 *Studiamo la sommabilità della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{x^{3/2}}} \tag{1.81}$$

nell'intervallo $(0,1]$. *Riesce*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

per cui $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. Inoltre

$$\sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{x^{3/2}}} \geq \frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{x^{3/2}} \geq \frac{1}{x^{3/2}},$$

onde per il criterio 16, la funzione assegnata non è sommabile in $(0,1]$. Ma è tuttavia integrabile, giacché è ivi positiva. Quindi

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{x^{3/2}}} dx = +\infty \tag{1.82}$$

In fig. 1.16 il grafico della funzione assegnata.

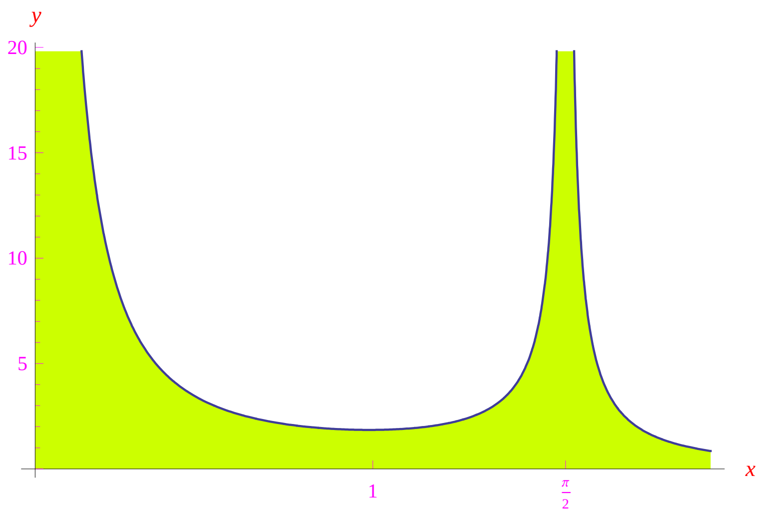


Figura 1.16: Grafico della funzione (1.81).

Criterio 19 *Sia f continua in $[a,b]-\{x_0\}$, con x_0 tale che f è ivi un infinito di ordine α rispetto all'infinito di riferimento*

$$u(x) = \frac{1}{|x-x_0|} \tag{1.83}$$

1. f è sommabile in $[a,b]$ se $\alpha < 1$.

2. f non è sommabile in $[a,b]$ se $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte del teorema. Per ipotesi

$$\exists \alpha \in (0,1) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = l > 0$$

Per definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x-x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow l - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} < l + \varepsilon$$

Cioè $\frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}}$ è definitivamente limitata intorno a x_0, cosicché

$$\exists M > 0 \mid \frac{f(x)}{|x-x_0|^{-\alpha}} \leq M \Longrightarrow f(x) < \frac{M}{|x-x_0|^{\alpha}} \quad \text{con } \alpha < 1,$$

onde la sommabilità di f in virtù del criterio 16. Passiamo alla seconda parte del teorema.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = l > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\forall \lambda \in (0,l) \, , \; \exists \delta_\lambda > 0 \mid 0 < |x-x_0| < \delta_\lambda \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} > \lambda \right.$$

Cioè

$$f(x) > \frac{\lambda}{|x-x_0|^{\alpha}}, \quad \forall x \in U_{\delta_\lambda} = (x_0 - \delta_\lambda, x_0 + \delta_\lambda) - \{x_0\} \, ,$$

da cui la non sommabilità di f in U_{δ_λ}. L'asserto segue immediatamente dal criterio 15. ■

Notiamo che la dimostrazione della prima parte del criterio 19 non è invalidata se risulta $l = 0$. Più precisamente, consideriamo il caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha \in (0,1) \, , \tag{1.84}$$

per cui resta dimostrata la sommabilità. Ma la (1.84) ci sta dicendo che l'infinito $f(x)$ ha ordine indeterminato, ma comunque < 1. Alla stessa maniera, la dimostrazione della seconda parte non è invalidata se risulta $l = +\infty$. Più precisamente, consideriamo il caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = +\infty, \quad \forall \alpha \geq 1 \tag{1.85}$$

Cioè $f(x)$ è un infinito di ordine indeterminato, ma comunque non inferiore a 1. Resta così dimostrato il criterio:

Criterio 20 *Sia f continua in $[a,b] - \{x_0\}$, con x_0 tale che f è ivi infinita:*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$$

Sia poi assegnato l'infinito di riferimento

$$u(x) = \frac{1}{|x-x_0|}$$

1. *Se f è un infinito di ordine indeterminato ma comunque < 1, cioè se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha \in (0,1) \, , \tag{1.86}$$

   allora f è sommabile in $[a,b]$.

2. *Se f è un infinito di ordine indeterminato ma comunque non inferiore a 1, cioè se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^{-\alpha}} = +\infty, \quad \forall \alpha \geq 1, \tag{1.87}$$

   allora f non è sommabile in $[a,b]$.

Esempio 21 *Studiamo la sommabilità di*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{in } (-1,1) \tag{1.88}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +1^-} f(x) = +\infty$$

Deteriminiamo (se esiste) l'ordine di infinito rispetto all'infinito di riferimento

$$u(x) = \frac{1}{|x \pm 1|},$$

a seconda dei punti $x = -1$ e $x = +1$. Segue

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{|x+1|^{-\alpha}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)^\alpha}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to -1^+} \frac{(1+x)^{2\alpha-1}}{1-x}}$$
$$= l > 0 \Longleftrightarrow 2\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 1/2$$

Cioè $f(x)$ è per $x \to -1^+$ un infinito di ordine $1/2$. Medesima conclusione per $x \to 1^-$. Ne concludiamo che la funzione è sommabile in $(-1,1)$. Per il calcolo dell'integrale, fissiamo la successione di intervalli

$$T_n = \left(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right),$$

onde

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1+1/n}^{1-1/n} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} [\arcsin(1) - \arcsin(-1)]$$

Cioè

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

La funzione è graficata in fig. 1.17

Esempio 22 *Sommabilità di*

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad \textit{in } (0,1]$$

Riesce

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

Dai limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = 1,$$

per cui $f(x)$ è un infinito di ordine 1. Ne consegue che f non è sommabile in $(0,1]$, ma è ivi integrabile, in quanto di segno costante. Più precisamente, è $f(x) > 0$, onde

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = +\infty$$

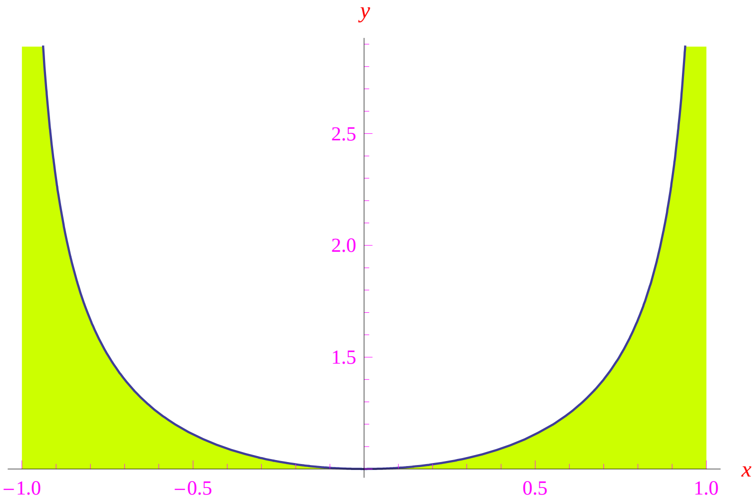


Figura 1.17: Grafico della funzione (1.88).

Esempio 23 *Sommabilità di*

$$f(x) = \frac{|\ln x|^\gamma}{x^\beta} \quad in \ (0,1], \quad \gamma > 0, \quad 0 < \beta < 1 \tag{1.89}$$

Tale funzione è manifestamente infinita per $x \to 0^+$. Stabiliamone l'ordine, calcolando:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln x|^\gamma}{x^{\beta-\alpha}},$$

dove assumiamo $\beta < \alpha < 1$. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ln x|^\gamma}{x^{\beta-\alpha}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^\gamma}{x^{\beta-\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^{\gamma-1}}{x^{\beta-\alpha}} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{\gamma^2}{(\beta-\alpha)^2} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^{\gamma-1}}{x^{\beta-\alpha}} \\ &= \ldots = K \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} = 0\end{aligned}$$

Cioè la funzione assegnata è, per $x \to 0^+$, un infinitesimo di ordine indeterminato ma comunque < 1. Ne consegue la sommabilità della funzione nell'intervallo assegnato. Mathematica esprime l'integrale di questa funzione attraverso la funzione euleriana gamma:

$$\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt$$

Precisamente:

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|^\gamma}{x^\beta} dx = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{(1-\beta)^{1+\gamma}}, \qquad \gamma > 0, \ 0 < \beta < 1 \tag{1.90}$$

Esempio 24 *Studiamo la sommabilità della funzione*

$$f(x) = e^{1/x} \ in \ (0,1] \tag{1.91}$$

Tale funzione è manifestamente infinita in $x = 0$. Determiniamo l'eventuale ordine:

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha e^{1/x} \underset{t=1/x}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty, \quad \forall \alpha > 0 \quad \textit{(per confronto tra infiniti)}$$

Ciò implica

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha e^{1/x} = 0, \quad \forall \alpha \geq 1$$

ovvero la funzione data è un infinito di ordine indeterminato, ma comunque non inferiore a 1. Ne concludiamo che tale funzione non è sommabile, ma è comunque integrabile in quanto di segno costante. Precisamente:

$$\int_0^1 e^{1/x} dx = +\infty$$

I teoremi dimostrati si riferiscono a funzioni generalmente continue in un intervallo limitato. Passiamo ora al caso di una funzione continua definita in un intervallo illimitato.

Criterio 25 *Se la funzione $f(x)$ continua nell'intervallo illimitato X, verifica la disuguaglianza*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|x|^\alpha} \quad \textit{con } \alpha > 1,$$

allora $f(x)$ è sommabile in X. Viceversa, se

$$|f(x)| \geq \frac{M}{|x|^\alpha} \quad \textit{con } 0 < \alpha \leq 1,$$

$f(x)$ non è sommabile in X.

Dimostrazione. Dall'esempio 8 segue che

$$g(x) = \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$$

è sommabile negli intervalli illimitati $[x_0 + h, +\infty)$ e $(-\infty, x_0 - h]$ essendo $h > 0$, con $\alpha \geq 1$. Ne consegue che la funzione

$$g_M(x) = \frac{M}{|x|^\alpha}$$

è sommabile in $[h, +\infty)$ e $(-\infty, -h]$. Viceversa, se $0 < \alpha < 1$, la $g_M(x)$ non è ivi sommabile.

Ciò premesso, l'asserto segue dal criterio 14. ■

Criterio 26 *Sia f continua nell'intervallo illimitato X. Sia inoltre infinitesima all'infinito*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$$

con ordine α rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = 1/|x|$.

1. *f è sommabile in X se $\alpha \geq 1$.*
2. *f non è sommabile in X se $\alpha < 1$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} = l > 0 \quad \text{con } \alpha > 1$$

Applichiamo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow l - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} < l + \varepsilon$$

Cioè la funzione

$$\frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}}$$

è limitata in un intorno di $+\infty$:

$$\exists M > 0 \mid \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} \leq M \Longrightarrow |f(x)| \leq \frac{M}{|x|^{\alpha}},\ \ \forall x \in (\delta_\varepsilon, +\infty),$$

onde la sommabilità di f in X, in vritù del criterio 25. Passiamo alla seconda parte del teorema.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} = l > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\forall \lambda \in (0, l),\ \exists \delta_\lambda > 0 \mid x > \delta_\lambda \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} > \lambda\right.$$

Cioè

$$f(x) > \frac{\lambda}{|x|^{\alpha}}, \quad \forall x \in U_{\delta_\lambda}(+\infty) = (\delta_\lambda, +\infty),$$

da cui la non sommabilità di f in $U_{\delta_\lambda}(+\infty)$. L'asserto segue immediatamente dal criterio 15. ■

Il criterio appena dimostrato ha un'immediata interpretazione geometrica: se per $|x| \to +\infty$ la funzione si annulla con "sufficiente rapidità", il corrispondente rettangoloide generalizzato ha una misura finita.

Si noti, inoltre, che la dimostrazione della seconda parte del teorema non è invalidata se $l = 0$. Infatti, in tal caso riesce

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{|x|^{\alpha}}, \quad \text{con } \alpha > 1,\ \forall x > \delta_\varepsilon,$$

onde la sommabilità di f. Alla stessa maniera, la dimostrazione della seconda parte del teorema conserva la propria validità se $l = +\infty$, avendosi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{|x|^{-\alpha}} > \varepsilon$$

Cioè

$$f(x) > \frac{\varepsilon}{|x|^{\alpha}}, \quad \forall x \in U_{\delta_\varepsilon}(+\infty) = (\delta_\varepsilon, +\infty) \quad \text{e con } 0 < \alpha < 1,$$

da cui la non sommabilità di f in $U_{\delta_\varepsilon}(+\infty) \subset X$, e quindi in X. Abbiamo così dimostrato il teorema:

Criterio 27 *Sia f continua nell'intervallo illimitato X. Sia inoltre infinitesimia all'infinito:*

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$$

Assegnato l'infinitesimo di riferimento $u(x) = 1/|x|$

1. *Se f è un infinitesimo di ordine indeterminato ma comunque > 1, cioè se*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|f(x)|}{u(x)^\alpha} = 0, \quad \forall a > 1,$$

allora f è sommabile in X.

2. *Se f è un infinitesimo di ordine indeterminato ma comunque non superiore a 1, cioè se*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|f(x)|}{u(x)^\alpha} = +\infty, \quad \forall a \in (0, 1],$$

allora f non è sommabile in X.

1.4.2 Alcune osservazioni importanti

Abbiamo stabilito l'esistenza di una classe di funzioni continue in $(-\infty, +\infty)$ ed ivi sommabili, pur non annullandosi all'infinito. La più generale funzione della predetta classe è:

$$f(x) = \eta(x) e^{-|x|^b \chi(x)}, \tag{1.92}$$

ove $b > 0$, mentre $\eta(x)$ se non è una costante è divergente all'infinito. invece, la funzione $\chi(x)$ è periodica. Ad esempio:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2 \sin^2 x} \tag{1.93}$$

graficata in fig. 1.18, e il cui integrale valutato numericamente è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2 \sin^2 x} dx \simeq 237.912 \tag{1.94}$$

Per quanto stabilito:

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} f(x), \qquad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx \right| < +\infty$$

Ciò è una conseguenza del fatto che i criteri di sommabilità esprimono condizioni sufficienti ma non necessarie. Nel caso particolare della sommabilità in un intervallo illimitato, si ha, ad esempio:

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ è sommabile} \\ \text{in } (-\infty, +\infty) \end{array} \right) \begin{array}{c} \not\Rightarrow \\ \Longleftarrow \end{array} \left(\begin{array}{c} \text{Per } x \to \pm\infty \text{ la funzione} \\ \text{è infinitesima di ordine } > 1 \end{array} \right)$$

Ciò premesso, dimostriamo il teorema:

Teorema 28

$$\left(\begin{array}{c} f \textit{ è sommabile in un} \\ \textit{intervallo } X \textit{ illimitato, ed } \exists \lim_{x \to \infty} f(x) \end{array} \right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \right) \tag{1.95}$$

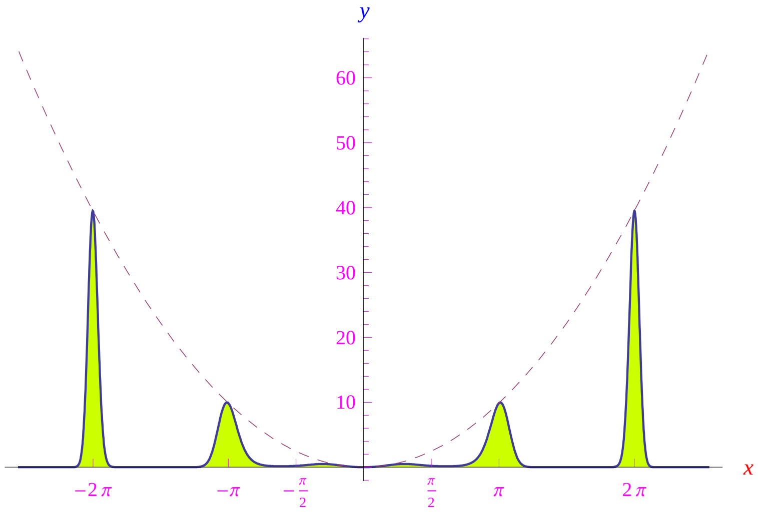


Figura 1.18: Grafico della funzione (1.93).

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo $X = (a, +\infty)$. Procediamo per assurdo, negando la tesi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lambda,$$

dove

$$0 < \lambda \leq +\infty \tag{1.96}$$

Segue (applicando la definizione di limite)

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow \lambda - \varepsilon < f(x) < \lambda + \varepsilon$$

Dal momento che λ verifica la (1.96):

$$\forall \lambda' \in (0, \lambda), \ \exists \delta_{\lambda'} > 0 \mid x \in U_{\delta_{\lambda'}}(+\infty) = (\delta_{\lambda'}, +\infty) \subset X \Longrightarrow f(x) > \lambda',$$

onde

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > \lambda'(x_2 - x_1), \quad \forall [x_1, x_2] \subset U_{\delta_{\lambda'}}(+\infty)$$

Una volta fissato $x_1 > \delta_{\lambda'}$, l'estremo superiore di integrazione $x_2 > x_1$ può essere preso ad arbitrio:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > \lambda'(x_2 - x_1), \quad \forall x_2 \in (x_1, +\infty)$$

Ponendo

$$M = \lambda'(x_2 - x_1),$$

si ha

$$\int_{x_1}^{x_1 + \frac{M}{\lambda}} f(x)\,dx > M, \quad \forall M > 0,$$

cosicché l'integrale a primo membro è maggiore di un qualunque numero reale positivo, ovvero

$$\sup \left\{ \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \mid [x_1, x_2] \subset U_{\delta_{\lambda'}}(+\infty) \right\} = +\infty$$

Cioè f non è sommabile in $[x_1, x_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = +\infty,$$

onde per il criterio 15 segue che f non è sommabile in X, contraddicendo l'ipotesi. ■

1.5 Integrali impropri

Per quanto visto nei numeri precedenti, una funzione generalmente continua in un intervallo X (limitato o illimitato), è integrabile in X, se è possibile determinare univocamente

$$\int_X f(x)\,dx$$

Abbiamo poi visto che ciò è sempre possibile per una funzione di segno costante. Divesamente, per una funzione di segno variabile, avevamo definito le funzioni non negative:

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

onde

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

Da quest'ultima relazione si ha

$$\int_X f(x)\,dx = \int_X f_1(x)\,dx - \int_X f_2(x)\,dx \tag{1.97}$$

Ne consegue che se risulta

$$\int_X f_1(x)\,dx = \int_X f_2(x)\,dx = +\infty,$$

l'integrale a primo membro della (1.97) si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Tale circostanza esprime la non integrabilità della funzione f nell'intervallo X. La predetta forma indeterminata può comunque dar luogo a un valore determinato (finito o infinito). Più precisamente, potrebbe essere possibile costruire una successione di intervalli

$$\{T_n\} \mid \{T_n\} \subset \{T_{n+1}\}, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = X$$

tale che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx$$

Tuttavia per una funzione non integrabile, tale limite non è univocamente determinata, nel senso che la sua esistenza e il suo valore dipendono dalla successione.

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 29 *Sia f una funzione non integrabile in un intervallo X (limitato o illimitato). Se esiste una successione di intervalli $\{T_n\}$, tale che*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{T_n} f(x)\,dx,$$

diremo che f è **integrabile in senso improprio***, e il predetto integrale si dice* **integrale improprio relativo alla successione** $\{T_n\}$*. Nel caso particolare*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{T_n} f(x)\,dx = I \in \mathbb{R},$$

diremo che il predetto integrale improprio risulta **convergente** *sulla successione* $\{T_n\}$*.*

La 29 non è una definizione operativa, giacché l'esistenza del limite che definisce l'integrale improprio è garantita solo per una assegnata successione. Per un'altra successione, ci aspettiamo la non esistenza di tale limite, o l'esistenza di un valore differente. Nonostante la non operatività della definizione 29, l'integrale improprio ha molte applicazioni, soprattutto in quei casi in cui occorre considerare il predetto limite per un'assegnata successione.

Segnaliamo, infine, che gli integrali impropri non sono molto maneggevoli relativamente ad alcune proprietà (decomposizione, etc.) degli integrali ordinari, e che si estendono agli integrali generalizzati.

1.6 Integrale principale di Cauchy

È facile persuadersi che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

non è integrabile in $[-a,b]$, dove $a,b>0$. Fissiamo la successione $\{T_n\}$, dove

$$T_n = \left[-a,-\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n},b\right], \tag{1.98}$$

per cui

$$\{T_n\} \subset \{T_{n+1}\}, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n = [-a,b] - \{0\}$$

come illustrato in fig. 1.19.

Segue

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{T_n}\frac{dx}{x} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-a}^{-1/n}\frac{dx}{x} + \int_{1/n}^{b}\frac{dx}{x}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln|x|\big|_{-a}^{-1/n} + \ln|x|\big|_{1/n}^{b}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{n} - \ln a + \ln b - \ln\frac{1}{n}\right)\\
&= \ln\frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Cioè

$$I = \ln\frac{b}{a}$$

è l'integrale improprio relativo alla successione $\{T_n\}$ della funzione $f(x) = 1/x$ esteso a $[-a,b]$. La particolare scelta di T_n (1.98) in cui viene rimosso l'intervallo $[-1/n,1/n]$ il cui centro è la singolarità $x=0$, individua una particolare classe di integrali impropri, noti

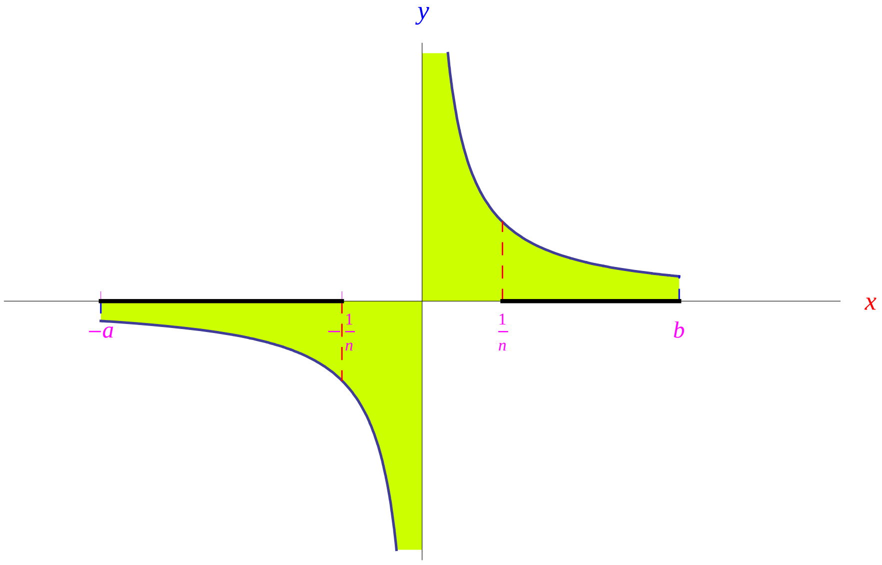


Figura 1.19: Calcolo dell'integrale improprio di $f(x) = 1/x$, esteso a $[-a, b]$.

come *integrali principali di Cauchy*. Nel caso in esame, l'integrale principale di Cauchy di $f(x) = 1/x$ esteso a $[-a, b]$ è $\ln \frac{b}{a}$. In simboli

$$^{*}\int_{-a}^{b} \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a} \tag{1.99}$$

La scelta di una successione "simmetrica" rispetto alla singolarità, pur essendo una convenzione, è vitale per poter definire univocamente l'integrale principale di Cauchy. Infatti, se prendiamo

$$T_n' = \left[-a, -\frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{2}{n}, b\right],$$

si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{T_n'} \frac{dx}{x} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{-a}^{-1/n} \frac{dx}{x} + \int_{2/n}^{b} \frac{dx}{x} \right) \\ &= \ln \frac{b}{a},\end{aligned}$$

cioè un valore diverso.