Integrale curvilineo di una funzione

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia f una funzione reale delle variabili reali x, y, z, definita in un dominio D di $\mathbb{R}^3$ ed ivi continua. Assegnata una curva regolare contenuta in D, di rappresentazione parametrica naturale:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s), \quad s \in [\alpha, \beta], \tag{1}$$

di estremi

$$P[\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)], \quad Q[\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)]$$

eseguiamo una decomposizione $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[\alpha, \beta]$, prendendo ad arbitrio $n+1$ punti $s_0, s_1, ..., s_n$ tali che:

$$\alpha = s_0 < s_1 < ... < s_n = \beta \tag{2}$$

In tal modo

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [s_k, s_{k+1}], \tag{3}$$

con $[s_k, s_{k+1}]$ a due a due disgiunti per $k = 0, 1, ..., n$. Denotiamo con P_k il punto di γ di ascissa curvilinea s_k. Quindi

$$\sigma_k \in [s_k, s_{k+1}] \text{ individua } Q_k \text{ appartenente all'arco di estremi } P_k, \ P_{k+1} \tag{4}$$

Costruiamo la somma

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(Q_k)(s_{k+1} - s_k) \tag{5}$$

Se Δ è la norma della decomposizione, cioè

$$\Delta = \max(s_k - s_{k-1}), \tag{6}$$

poniamo

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x, y, z)\, ds \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(Q_k)(s_{k+1} - s_k), \tag{7}$$

che è l'integrale curvilineo di $f(x, y, z)$ esteso alla curva γ di estremi $P(\alpha)$, $Q(\beta)$. D'altra parte

$$f(Q_k) = f[\varphi(\sigma_k), \psi(\sigma_k), \chi(\sigma_k)],$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(Q_k)(s_{k+1} - s_k) &= \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f[\varphi(\sigma_k), \psi(\sigma_k), \chi(\sigma_k)](s_{k+1} - s_k) \\ &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\, ds \end{aligned} \tag{8}$$

Ne consegue

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x, y, z)\, ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\, ds \tag{9}$$

Supponiamo ora che la curva γ sia data in rappresentazione parametrica non naturale:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b] \tag{10}$$

Eseguendo nell'integrale definito a secondo membro della (9) il cambio di variabile $s = s(t)$:

$$ds = \pm H(t)\, dt, \quad H(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \tag{11}$$

dove va preso il segno + se γ è orientata nel verso delle t crescenti, i.e. $s(t)$ è strettamente crescente in $[a, b]$. In questo caso gli estremi di integrazione nell'integrale definito cambiano nel seguente modo:

$$\alpha \leq s(t) \leq \beta \Longrightarrow a \leq t \leq b,$$

e la (9) si scrive

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt \tag{12}$$

Viceversa, se γ è orientata nel verso delle t decrescenti:

$$ds = -H(t)\, dt$$

e

$$\alpha \leq s(t) \leq \beta \Longrightarrow b \geq t \geq a,$$

onde

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x, y, z)\, ds = -\int_b^a f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt \tag{13}$$