Integrale del Fasano-Marmi

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_{x_0}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

dove $x_0 < \xi$, quest'ultimo è uno zero di $f(x)$. Dal momento che $f(x) \geq 0$

$$\int_{x_0}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \leq +\infty$$

Cioè $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ è integrabile. Per la sommabilità applichiamo un noto criterio

Criterio 1 *Sia $g(x)$ una funzione reale definita in $[a,b] - \{\xi\}$, dove ξ (non necessariamente punto interno) è una singolarità. Se in un intorno di tale punto, $g(x)$ verifica una limitazione del tipo*

$$|g(x)| \leq \frac{M}{|x-\xi|^{\alpha}}, \quad M > 0, \ \ 0 < \alpha < 1,$$

allora $g(x)$ è sommabile in $[a,b]$. Se invece, verifica una limitazione del tipo

$$|g(x)| \geq \frac{M}{|x-\xi|^{\alpha}}, \quad M > 0, \ \ \alpha \geq 1,$$

allora $g(x)$ non è sommabile in $[a,b]$.

Nel nostro caso la funzione in esame è $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, avendosi $f(\xi) = 0$, per cui

$$\exists I_{\delta}^{-}(\xi - \delta, \xi) \mid f(x) \leq (\xi - x)^{\alpha/2}, \quad \alpha \geq 1$$

Ne segue

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \geq \frac{1}{|x-\xi|^{\alpha}}, \quad \alpha \geq 1$$

onde

$$\int_{x_0}^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = +\infty$$