Ordine di infinitesimo di $x \sin \frac{1}{x}$

Marcello Colozzo
[http://www.extrabyte.info]

Rammentiamo i concetti principali sugli infinitesimi. Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione (al finito o all'infinito) per X. Se $f(x)$ è una funzione definita in X, sussiste la seguente

Definizione 1

$$\left(f(x) \text{ è un infinitesimo in } x_0\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\right)$$

Ad esempio, $\cos x$ è un infinitesimo in $x_0 = \frac{\pi}{2}$, mentre e^x è un infinitesimo per $x \to -\infty$.

Ciò premesso, sia $\mathcal{C}$ la classe degli infinitesimi in un assegnato punto di accumulazione x_0. È necessario definire operativamente un criterio di confronto tra gli elementi di $\mathcal{C}$. A tale scopo, prendiamo arbitrariamente $f, g \in \mathcal{C}$ e studiamo il comportamento del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ in un intorno di x_0. Come è noto, ciò equivale a ricercare il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

Se il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è regolare, per il limite (1) abbiamo i seguenti casi:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} = \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \\ l \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \tag{2}$$

Nel primo caso l'infinitesimo $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$, e diremo che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine superiore a* $g(x)$. Nel secondo caso (il rapporto è divergente positivamente o negativamente) l'infinitesimo $f(x)$ tende a zero meno rapidamente di $g(x)$, e diremo che $f(x)$ è *un infinitesimo di ordine inferiore a* $g(x)$. Nel terzo caso $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la stessa rapidità, e diremo che f e g sono *infinitesimi dello stesso ordine*. Nel caso speciale in cui risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

si ha che gli infinitesimi f, g sono *equivalenti* e si scrive $f \sim g$. Se invece il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è non regolare nel punto x_0, per studiarne il comportamento in un intorno di x_0, si ricerca il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|},$$

riapplicando le definizioni precedenti (se il limite esiste). Nell'ipotesi in cui nemmeno il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ non è regolare in x_0, ma risulta:

$$\left(\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \forall x \in X_1 \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}, \ \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2\right) \tag{3}$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ e } g \text{ sono infinitesimi} \\ \text{dello stesso ordine} \end{array}\right),$$

essendo X_1 l'insieme di definizione del rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$. In altri termini, se esiste un intorno di x_0 in cui il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è compreso tra $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$, allora f e g sono dello stesso ordine. Se nemmeno la (3) è verificata, diremo che gli infinitesimi f, g sono *non confrontabili*. Per contro, in tutti gli altri casi, gli infinitesimi f, g sono *confrontabili*.

Sia $\mathcal{C}_*$ la sottoclasse di $\mathcal{C}$ composta dagli infinitesimi non confrontabili. Presi $f,g \in \mathcal{C}_*$, se risulta:

$$\exists I\left(x_0\right) \mid x \in X_1 \cap I\left(x_0\right) - \left\{x_0\right\} \Longrightarrow \inf_{I(x_0)} \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|} = 0, \ \sup_{I(x_0)} \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|} < +\infty, \tag{4}$$

diremo che f è un infinitesimo *di ordine non inferiore a* $g\left(x\right)$. Viceversa, se risulta:

$$\forall I\left(x_0\right), \exists \varepsilon > 0 \mid x \in X_1 \cap I\left(x_0\right) - \left\{x_0\right\} \Longrightarrow \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|} > \varepsilon, \ \sup_{I(x_0)} \frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|} = +\infty, \tag{5}$$

diremo che f è un infinitesimo *di ordine non superiore a* $g\left(x\right)$. Ad esempio, consideriamo gli infinitesimi in $x_0 = 0$:

$$f\left(x\right) = x \sin \frac{1}{x}, \ g\left(x\right) = x \tag{6}$$

Risulta:

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \sin \frac{1}{x}$$

Tale rapporto è manifestamente non regolare in $x = 0$, ed altrettanto il rapporto

$$\left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right| = \left|\sin \frac{1}{x}\right|$$

Inoltre non è nemmeno verificata la (3), per cui gli infinitesimi (6) non sono confrontabili. Ma è verificata la (4):

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{0\right\}, \ \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1,$$

onde in $x_0 = 0$, $x \sin \frac{1}{x}$ è un infinitesimo di ordine non inferiore a x.