

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int f(x) dx = \oint_{\Gamma} (X dx + Y dy + Z dz)$$

Dalla legge di Coulomb alla legge di Gauss. La densità di energia elettrostatica

Marcello Colozzo

Legge di Coulomb $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x}'$

Legge di Gauss $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 4\pi k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}$

Densità di energia elettrostatica:

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi k} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2$$

Indice

1	Elettrostatica	2
1.1	Legge di Coulomb	2
1.2	Campo elettrico	2
1.3	Legge di Gauss	5
1.3.1	Formulazione del problema e dimostrazione di un teorema	5
1.3.2	Interpretazione fisica	7
1.3.3	Intepretazione vettoriale	9
1.4	Energia potenziale. Densità di energia elettrostatica	10
	Bibliografia	13

1 Elettrostatica

1.1 Legge di Coulomb

Attraverso una serie impressionante di esperimenti, Coulomb dimostrò che la forza esercitata tra una coppia di piccoli corpi elettricamente carichi, oltre a manifestare un ovvio **carattere vettoriale**, verifica le seguenti proprietà:

- è direttamente proporzionale alla carica elettrica di ciascun corpo;
- va come r^{-2} dove r è la distanza tra i due corpi;
- la sua direzione è quella della congiungente i due corpi;
- il verso è di tipo attrattivo se le cariche sono di segno opposto, e viceversa.

Si noti che idealmente tutto ciò è valido nel vuoto.

1.2 Campo elettrico

Seguendo le orme di Coulomb, stabiliamo l'esistenza di una forza scambiata tra piccoli corpi elettricamente carichi, come discusso nel numero precedente. Per inciso, nel caso di $n > 2$ corpi, la forza agente su uno di essi è la risultante delle forze dovute ai rimanenti corpi (*principio di sovrapposizione*). Argomentando in termini di campo di forze, è più agevole riferirsi a un campo di forze coulombiane $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ dove \mathbf{x} è il vettore posizione di un generico punto dello spazio fisico \mathbb{R}^3 riferito a un **sistema di riferimento inerziale** $K(Oxyz)$, le quali forze verificano i punti esaminati nel numero precedente. Ciò conduce alla definizione di *campo elettrico* $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ inteso come la forza per unità di carica elettrica allocata in \mathbf{x} i.e. nel punto dello spazio in cui vogliamo determinare il predetto campo. Questa definizione presenta il seguente problema: per poter valutare \mathbf{E} in \mathbf{x} dobbiamo portare ivi una carica unitaria che però potrebbe modulare la configurazione preesistente di carica elettrica, alterando quindi il campo. Alternativamente, si esegue un'operazione di passaggio al limite: comunque prendiamo un piccolo corpo di prova elettricamente carico, misuriamo il rapporto \mathbf{F}/q essendo \mathbf{F} la forza per valori della carica q progressivamente decrescenti. Tale procedimento al limite ci consente di scrivere

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

in accordo alla definizione iniziale.

In fig. 1 due cariche elettriche puntiformi q_1, q_2 sono staticamente posizionate in \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . La forza agente su q_1 dovuta alla carica q_2 si scrive:

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{vers}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (2)$$

dove: $k > 0$ è una costante dipendente dal sistema di unità di misura; $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ = distanza tra le cariche, mentre il versore del vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ è

$$\text{vers}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$$

per cui in forma più compatta:

$$\mathbf{F} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \quad (3)$$

Discutiamo questa equazione vettoriale, rammentando che q_1, q_2 sono quantità algebriche.

1. $q_1 q_2 > 0$ (i.e. cariche dello stesso segno). Il vettore \mathbf{F} è parallelo e concorde al vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, come illustrato in fig. 2.
2. $q_1 q_2 < 0$ (i.e. cariche di segno opposto). Il vettore \mathbf{F} è parallelo e discorde al vettore $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, come illustrato in fig. 3.

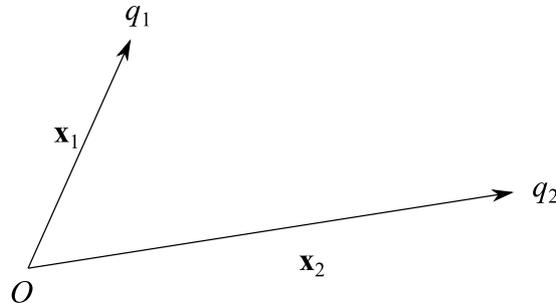


Figura 1: Cariche elettriche puntiformi. La posizione è riferita all'origine O di un sistema di riferimento inerziale.

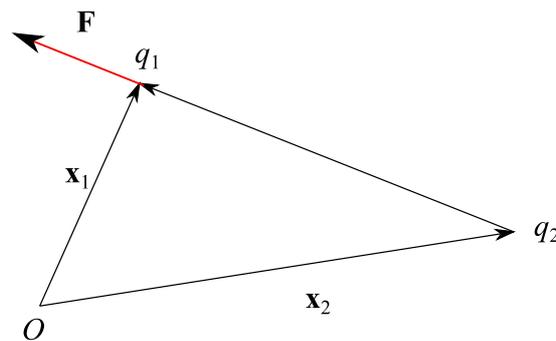


Figura 2: Cariche dello stesso segno si respingono.

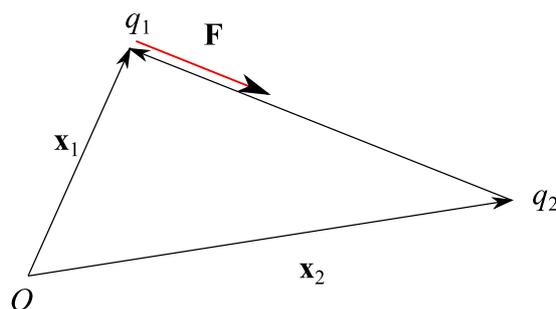


Figura 3: Cariche di segno opposto si attraggono.

Ne segue che una carica puntiforme q_1 ferma in \mathbf{x}_1 , genera in un qualunque punto x un campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

come vediamo in fig. 3

Riguardo alle unità di misura, in unità elettrostatiche è $k = 1$ e la carica elettrica si misura in statcoulomb, mentre il campo elettrico in statvolt/cm. Nel sistema SI è $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ dove

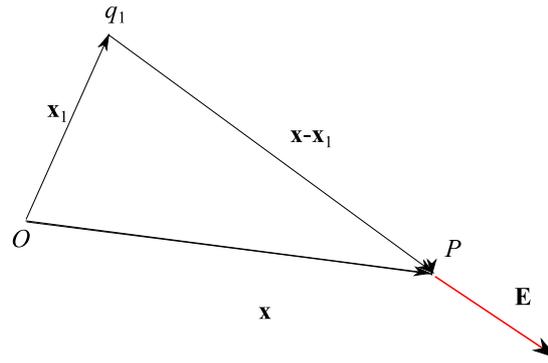


Figura 4: Campo elettrico nel punto P , generato dalla carica posta in \mathbf{x}_1 .

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, la carica elettrica si misura in Coulomb (C) e il campo elettrico in volt/metro. Riassumendo

$$k = \begin{cases} 1, & \text{esu (unità elettrostatiche)} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, & \text{SI} \end{cases}$$

Per il principio di sovrapposizione lineare degli effetti, il campo elettrico generato da una distribuzione di n cariche q_i ciascuna posizionata in \mathbf{x}_i , è dato da

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i(\mathbf{x})$$

essendo $\mathbf{E}_i(\mathbf{x})$ il campo generato dalla carica i -esima:

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = kq_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$$

Per una distribuzione continua di densità $\rho(\mathbf{x})$ localizzata in una regione D dello spazio euclideo R^3

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_D \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \quad (4)$$

D'altra parte

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \neq 0, & \text{se } \mathbf{x} \in D \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

per cui la (4) può scriversi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}' \quad (5)$$

La carica totale è

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (6)$$

Le (5)-(6) sono estendibili al caso discreto attraverso il formalismo della funzione delta di Dirac. Precisamente, per una distribuzione di n cariche si ha la densità

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (7)$$

essendo $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ la delta di Dirac 3-dimensionale:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i)$$

Ricordiamo che la delta di Dirac ha le dimensioni del reciproco del suo argomento, per cui vediamo che il termine i -esimo nella (7) ha le giuste dimensioni dato che $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ha le dimensioni del reciproco di un volume. Segue

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n q_i \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d^3\mathbf{x}$$

Ma

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d^3\mathbf{x} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_i) dy}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - z_i) dz}_{=1} = 1$$

onde

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

1.3 Legge di Gauss

1.3.1 Formulazione del problema e dimostrazione di un teorema

Abbiamo visto che il campo elettrico generato da una distribuzione di cariche $\rho(\mathbf{x})$ è

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad k = \begin{cases} 1, & \text{esu (unità elettrostatiche)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, & \text{SI} \end{cases} \quad (8)$$

Il calcolo di quest'integrale non è sempre agevole, per cui si ricorre alla cosiddetta *legge di Gauss*. Consideriamo una carica puntiforme q allocata in un punto P_0 di una regione D di volume V . Matematicamente, D è un dominio regolare di \mathbb{R}^3 per cui la sua frontiera è una superficie regolare S . In un generico punto $P \in S$ si consideri l'elemento di superficie $d\sigma$ che come è noto può essere «vettorializzato» come $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}d\sigma$ essendo \mathbf{n} il versore della normale esterna a S (tale superficie è orientabile per cui il campo di vettori $\mathbf{n}(P)$ è univocamente definito. (fig. 5)).

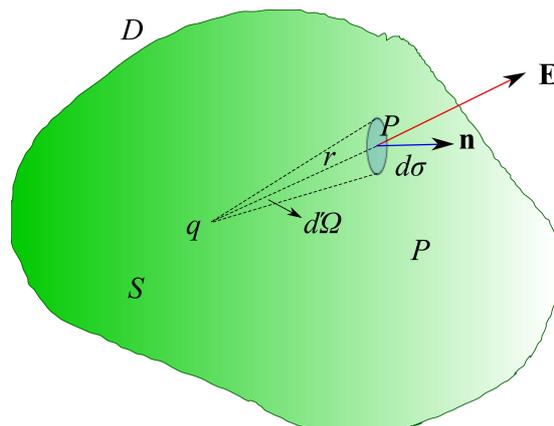


Figura 5: Carica elettrica puntiforme allocata all'interno di una regione dello spazio fisico.

Sia \mathbf{E} il campo elettrico in P generato da q . Valutiamo il prodotto scalare

$$\mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}d\sigma = E \cos \theta d\sigma$$

essendo θ l'angolo tra \mathbf{E} ed \mathbf{n} . Il modulo del vettore \mathbf{E} si calcola facilmente:

$$E = k \frac{q}{r^2}$$

dove $r = \text{dist}(P_0, P)$ mentre k è la solita costante dipendente dal sistema di unità di misura. Quindi

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = kq \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma$$

È comodo invocare l'angolo solido elementare:

$$r^2 d\Omega = \cos \theta d\sigma$$

onde

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = kq d\Omega$$

Ora non dobbiamo fare altro che integrare su S o ciò che è lo stesso sull'angolo solido totale (4π):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = kq \int_{4\pi} d\Omega = 4\pi kq$$

Generalizzando a una distribuzione di cariche di densità $\rho(\mathbf{x})$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 4\pi k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (9)$$

che è la *legge di Gauss*. Si tratta, dunque, di una rappresentazione integrale del campo elettrico generato da una assegnata distribuzione di carica elettrica. In altri termini, è una formulazione integrale della legge di dell'elettrostatica. Data la sua importanza, discutiamone gli aspetti matematici. Innanzitutto, dall'*analisi vettoriale* sappiamo che

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \text{flusso elementare del vettore } \mathbf{E} \text{ attraverso } d\sigma$$

Ne segue

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \text{flusso del campo vettoriale } \mathbf{E}(\mathbf{x}) \text{ attraverso } S$$

Per il teorema della divergenza

$$\int_D \text{div } \mathbf{E} d^3x = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

Ricordiamo che $\text{div } \mathbf{E}$ è la divergenza del campo \mathbf{E} i.e.

$$\text{div } \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Quindi

$$\int_D [\text{div } \mathbf{E} - 4\pi k \rho(\mathbf{x})] d^3x = 0$$

In virtù dell'arbitrarietà di D , si ha

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi k \rho = \begin{cases} 4\pi \rho, & \text{esu} \\ \rho/\varepsilon_0, & \text{SI} \end{cases}$$

che esprime localmente la legge di Gauss. Detto in altro modo, l'equazione trovata è la rappresentazione differenziale della legge di Gauss ed è manifestamente un'*equazione differenziale alle derivate parziali*. Dall'analisi vettoriale sappiamo che per poter definire univocamente un campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ occorre conoscere $\text{div } \mathbf{A}$ e $\text{rot } \mathbf{A}$. Dobbiamo perciò determinare

$$\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \wedge \mathbf{E}$$

Anziché applicare direttamente l'operatore nabla all'espressione integrale

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x',$$

osserviamo che

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' = -k \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' \\ \implies \text{rot} \mathbf{E} &= -k \nabla \wedge \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3x' = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Quindi il campo elettrico è irrotazionale:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (10)$$

e come tale ammette un potenziale $\Phi(\mathbf{x})$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi(\mathbf{x}) \quad (11)$$

1.3.2 Interpretazione fisica

Il potenziale scalare ha un'immediata interpretazione fisica. Supponiamo di voler spostare una carica elettrica q da un punto A a un punto B lungo una traiettoria γ che attraversa una regione sede di un campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ di potenziale $\Phi(\mathbf{x})$ (fig. 6).

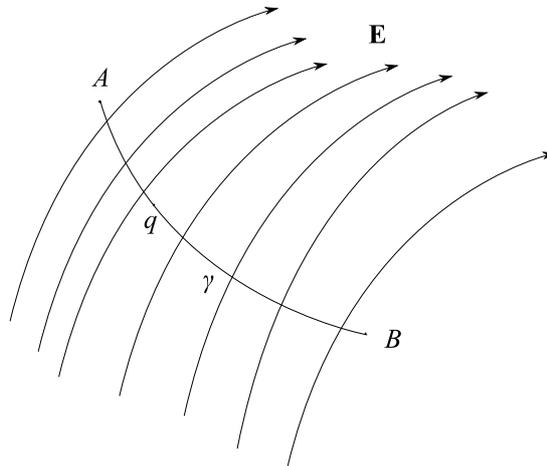


Figura 6: Spostiamo la carica elettrica lungo il cammino γ .

Quindi la particella è soggetta alla forza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Dalla (11) che qui riscriviamo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \Phi \implies \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla (q\Phi) = -\nabla W$$

cosicché $W(x) = q\Phi(x)$ è l'**energia potenziale** del campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Rammentiamo che il *potenziale* è $U(\mathbf{x}) = -W(\mathbf{x})$, giacché per definizione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla U$$

Il campo è conservativo per cui il lavoro svolto da $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ per spostare la carica da A a B , è indipendente dal cammino; discutiamone in termini di forme differenziali lineari. A tale scopo, scriviamo la **rappresentazione naturale** del predetto cammino:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad s \in [0, s_1]$$

avendo istituito un sistema di ascisse curvilinee su γ con origine in A e verso positivo da A a B . Il lavoro eseguito da F è dato dall'**integrale curvilineo**:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma(A,B)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

dove $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds}$ è il versore della retta tangente a γ orientata nel verso positivo di γ . Segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int_0^{s_1} \{F_x[x(s), y(s), z(s)]x'(s) + F_y[x(s), y(s), z(s)]y'(s) + F_z[x(s), y(s), z(s)]z'(s)\} ds \\ &= \int_{\gamma(A,B)} F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

cioè l'integrale curvilineo lungo $\gamma(A, B)$ della forma differenziale lineare

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

che per quanto precede è esatta:

$$\mathbf{F} = \nabla U \implies dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

cosicché

$$\mathcal{L} = U(B) - U(A) = W(A) - W(B)$$

Tuttavia, siamo interessati al lavoro svolto sulla carica q *contro* le forze del campo elettrico, per cui:

$$L = -\mathcal{L} = W(B) - W(A)$$

In sintesi:

$$L = q\Phi(B) - q\Phi(A) \tag{12}$$

$$q\Phi(A) = \text{energia potenziale in } A$$

$$q\Phi(B) = \text{energia potenziale in } B$$

Esercizio 1 (Il testo è riportato in [?]. La soluzione è nostra)

Trovare il lavoro compiuto spostando una carica puntiforme $q = -20 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ dall'origine a $(4, 0, 0) \text{ m}$ nel campo

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right) \mathbf{e}_1 + 2x\mathbf{e}_2$$

Soluzione

$$L = -q \int_{\gamma(0,B)} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

Siccome il lavoro è indipendente dal cammino, scegliamo quello più semplice e cioè il segmento di estremi $(0, 0)$ a $(4, 0)$ avendo omesso la quota z dato che il campo agisce solo sul piano coordinato xy . Abbiamo

$$\gamma : x(s) = s, \quad y = 0, \quad s \in [0, 4]$$

per cui

$$\begin{aligned} L &= -q \int_0^4 \{E_x[x(s), y(s)] x'(s) + E_y[x(s), y(s)] y'(s)\} ds \\ &= -q \int_0^4 \left[\left(\frac{s}{2} + 0 \right) \cdot 1 + 2s \cdot 0 \right] ds = -4q = 80 \cdot 10^{-6} \text{ J} \end{aligned}$$

Alternativamente, si calcola il potenziale del campo dopodiché la determinazione di L è immediata. Tale calcolo viene lasciato come esercizio.

1.3.3 Interpretazione vettoriale

Riprendiamo il campo elettrostatico $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ generato da una distribuzione:

$$\rho(\mathbf{x}) \begin{cases} \neq 0, & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

Riguardo alla topologia del dominio D , assumiamo ragionevoli ipotesi di regolarità che fisicamente sono sempre realizzate. Per quanto visto nei numeri precedenti, la legge di Coulomb si generalizza nel modo seguente:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad k = \begin{cases} 1, & \text{esu (unità elettrostatiche)} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, & \text{SI} \end{cases} \quad (13)$$

Ciò premesso, prendiamo una **superficie regolare** S . Ricordiamo brevemente che tale luogo geometrico può avere una rappresentazione implicita:

$$f(x, y, z) = 0 \quad (14)$$

cioè intesa come superficie di livello di una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 . La regolarità implica

$$\nabla f(P) \neq \mathbf{0}, \quad \forall P \in S$$

oppure una rappresentazione parametrica

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad \forall (u, v) \in B \subseteq \mathbb{R}^2$$

ove tali funzioni sono classe C^2 , e la matrice jacobiana:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

ha identicamente rango 2. Definendo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F(u, v) &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G(u, v) &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

si ha

$$d\sigma = \sqrt{\mathcal{E}F - G^2} du dv$$

che ci consente di ridurre un integrale di superficie a un ordinario integrale doppio.

Il flusso del campo vettoriale \mathbf{E} attraverso la superficie S , è lo scalare:

$$\phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (15)$$

Assumendo che S sia una superficie aperta, dalla sua regolarità segue la regolarità della curva «bordo di S » che denotiamo con $B(S)$. Stabilendo convenzionalmente il verso positivo quale verso di percorrenza di un osservatore che lascia alla sua sinistra l'interno di S , si definisce *circuitazione* di E , lo scalare:

$$C_{B(S)}(\mathbf{E}) = \oint_{+B(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (16)$$

Quindi, per un qualunque campo elettrostatico e per un'assegnata superficie regolare S , è univocamente determinata la coppia di scalari (15)-(16).

Osservazione 2 *Il flusso e la circuitazione possono essere definiti per un qualunque campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ regolare.*

Osservazione 3 *La circuitazione si definisce per una qualunque **curva regolare semplice** (cioè che non si intreccia) e chiusa:*

$$C_{+\gamma}(\mathbf{E}) = \oint_{+\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (17)$$

Qui il verso positivo è arbitrariamente scelto.

Il teorema di Gauss ci dice che

$$\phi_S(\mathbf{E}) = 4\pi k Q_D \quad (18)$$

dove Q_D è la carica elettrica contenuta nel dominio D avente S per frontiera:

$$Q_D = \int_D \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

E in termini differenziali:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k \rho \quad (19)$$

Il significato fisico della circuitazione del campo elettrico è evidente ragionando in termini di potenziale scalare, come visto nel numero precedente. Diversamente, il teorema di Stokes restituisce per una qualunque superficie aperta e regolare S

$$\phi_S(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = C_{B(S)}(\mathbf{E})$$

Segue

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \implies C_{B(S)}(\mathbf{E}) = 0$$

1.4 Energia potenziale. Densità di energia elettrostatica

Nella sezione 1.3 abbiamo visto che $q\Phi$ è interpretabile alla stregua di un'energia potenziale W . Diamone una definizione operativa. A tale scopo immaginiamo di spostare una carica q_i dall'infinito in un punto $\mathbf{x}_i \in D$ essendo D una regione sede di un campo elettrico dovuto a una distribuzione di cariche q_1, q_2, \dots, q_{n-1} . Dalla (12) segue che il lavoro svolto è

$$\mathcal{L}_i = q_i (\Phi(\mathbf{x}_i) - \Phi(\infty))$$

È fisicamente ragionevole richiedere $\Phi(\infty) = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}) = 0$, per cui

$$\mathcal{L}_i = q_i \Phi(\mathbf{x}_i) \stackrel{def}{=} W_i \quad (20)$$

che assumiamo come definizione di energia potenziale della carica q_i nella posizione \mathbf{x}_i . Il potenziale $\Phi(\mathbf{x}_i)$ è generato dalle $n - 1$ cariche q_j , onde

$$\Phi(\mathbf{x}_i) = k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Segue

$$W_i = k q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

Sommando su *tutte* le cariche presenti, otteniamo l'energia potenziale *totale*:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

che può essere riscritta come

$$W = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (21)$$

Qui vanno esclusi i termini con $i = j$ che sono i cosiddetti *termini di auto-interazione* e che danno luogo a degli infiniti. Per una distribuzione continua di densità $\rho(\mathbf{x})$:

$$W = \frac{k}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \rho(\mathbf{x}) k \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}_{\Phi(\mathbf{x})}$$

cosicché

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) d^3x \quad (22)$$

Proviamo a svincolarci dalla densità di carica. A tale scopo, ricordiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho$$

Ma $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ onde

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi k \rho \quad (23)$$

che è la celebre equazione di Poisson. Ricaviamo ρ

$$\rho = -\frac{\nabla^2 \Phi}{4\pi k} = -\frac{\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi}{4\pi k} = -\frac{|\nabla \Phi| |\nabla \Phi|}{4\pi k}$$

che sostituita nella (22):

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{x}) |\nabla \Phi| |\nabla \Phi| d^3x$$

Integriamo per parti:

$$W = -\frac{1}{8\pi k} \left\{ [\Phi(\mathbf{x}) |\nabla \Phi|]_{\mathbf{x} \in \partial \mathbb{R}^3} - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \Phi|^2 d^3x \right\}$$

Il primo termine tra parentesi graffe si annulla perché il potenziale è nullo all'infinito. Quindi:

$$W = \frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\Phi|^2 d^3x \stackrel{\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi}{=} \frac{1}{8\pi k} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 d^3x$$

efficacemente esprimibile come

$$W = \int_{\mathbb{R}^3} w(\mathbf{x}) d^3x$$

dove

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi k} |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2$$

è la *densità di energia elettrostatica*. Evidentemente per un qualunque campo non nullo:

$$w(\mathbf{x}) > 0 \implies W > 0$$

in stridente contrasto con la (21) secondo cui l'energia potenziale potenziale può benissimo essere negativa. Consideriamo il caso particolare di $n = 2$ cariche posizionate rispettivamente in \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Il campo elettrico in un qualunque punto $P(\mathbf{x})$ è

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = kq_1 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3} + kq_2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}$$

Ne segue la densità di energia elettrostatica per questo sistema di cariche:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= \frac{1}{8\pi k} \left[\frac{k^2 q_1^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{k^2 q_2^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + 2 \frac{k^2 q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \right] \\ &= \frac{k}{8\pi} \frac{q_1^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^4} + \frac{k}{8\pi} \frac{q_2^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^4} + \frac{k}{4\pi} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} \end{aligned}$$

I termini di auto-interazione sono

$$\frac{k}{8\pi} \frac{q_i^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^4} \implies w_{auto}(\mathbf{x}) = \frac{k}{8\pi} \sum_{i=1}^2 \frac{q_i^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^4} \quad (24)$$

Il secondo termine:

$$w_{int}(\mathbf{x}) = \frac{k}{4\pi} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3}$$

è il termine di interazione. Per mostrare ciò, si integra per ottenere l'energia potenziale di interazione:

$$W_{int} = \int_{\mathbb{R}^3} w_{int}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{kq_1 q_2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2|^3} d^3x$$

Con un opportuno cambio di variabile [1] si giunge a

$$W_{int} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$$

come appunto deve essere. In tal modo la densità di energia si esprime come contributo di due termini

$$w(\mathbf{x}) = w_{auto}(\mathbf{x}) + w_{int}(\mathbf{x})$$

ed è proprio il termine di auto-interazione a rendere $w(\mathbf{x}) > 0$ per qualunque configurazione di campo, mentre nella sommatoria avevamo escluso i predetti termini.

Riferimenti bibliografici

- [1] Jackson J.D. *Elettrodinamica classica*. Zanichelli