Ricerca di Gram points e la congettura di Riemann

Marcello Colozzo

1 Introduzione

La *funzione di Riemann-Siegel* o *funzione di Hardy* è definita attraverso la funzione ζ di Riemann dalla seguente relazione:

$$Z(t) = \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) e^{i\theta(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

dove

$$\theta(t) = \operatorname{Im}\left[\ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)\right] - \frac{t}{2}\ln \pi \tag{2}$$

Tale funzione è reale e ha gli stessi zeri di $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, cioè della funzione zeta calcolata lungo la linea critica. A differenza della funzione reale $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$ che è non derivabile in ogni punti t_k corrispondente a uno zero non banale, la funzione di Hardy è ivi derivabile, come vediamo dai grafici di figg. 1-2.

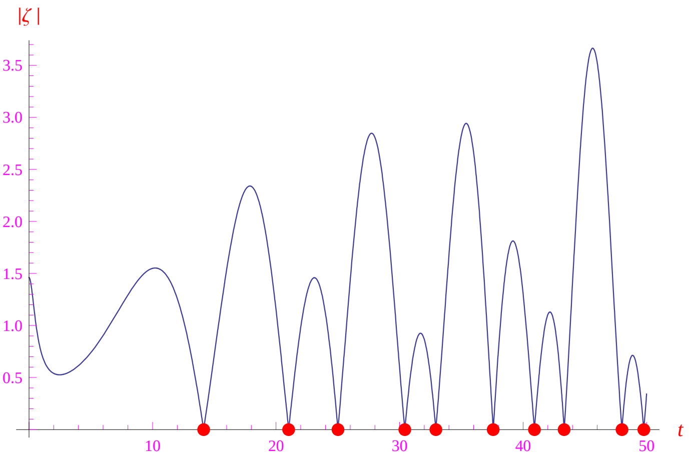

Figura 1: Andamento di $\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|$. La funzione non è derivabile nei punti t_k in cui si annulla. Stiamo considerando punti $t \geq 0$, in virtù della simmetria della funzione ζ.

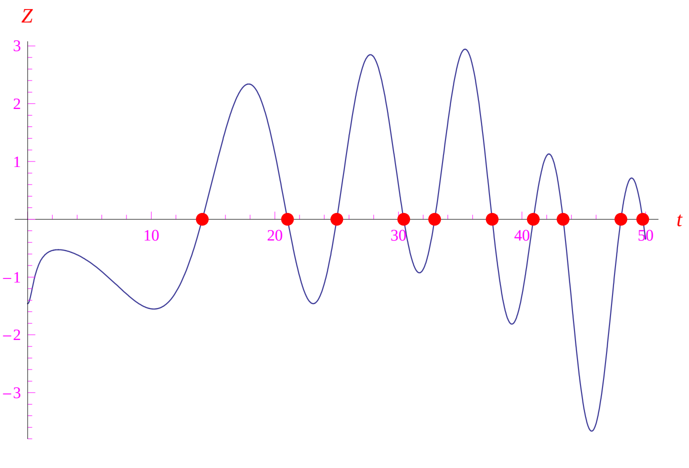

Figura 2: Andamento della funzione di Hardy.

Per il teorema di Rolle:

$$t_k, t_{k+1} \in \mathbb{R} \mid Z(t_k) = Z(t_{k+1}) = 0 \Longrightarrow \exists \tau_k \in (t_k, t_{k+1}) \mid \left.\frac{d}{dt}Z(t)\right|_{t=\tau_k} = 0 \tag{3}$$

In altri termini, tra una qualunque coppia di zeri successivi della $Z(t)$, esiste almeno un punto di estremo relativo per la funzione medesima.

2 Gram points

I punti di estremo relativo τ_k sono detti *punti di Gram* e si denotano con g_n, dove l'intero n è tale che in $[0, g_n]$, cadono $n+1$ zeri. Ad esempio

$$g_0 \simeq 10.23$$

è un punto di Gram di ordine n, giacché non ci sono zeri in $[0, g_0]$, come vediamo dalla fig. 3.

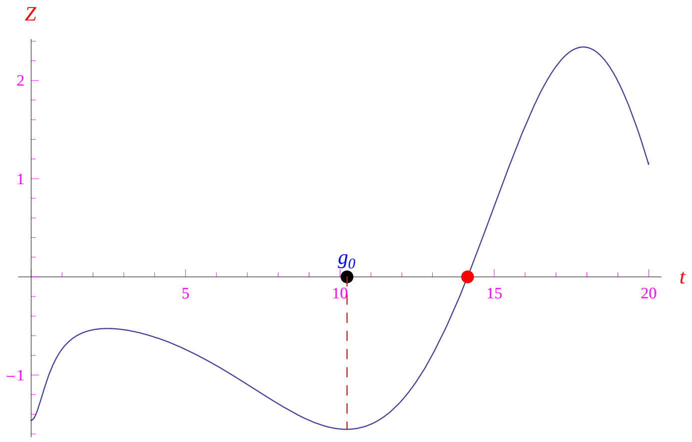

Figura 3: Ricerca di Gram points.

In fig. 4 vediamo altri due punti di Gram. Da qui si deduce la legge:

$$g_n \mid (-1)^n Z(g_n) > 0$$

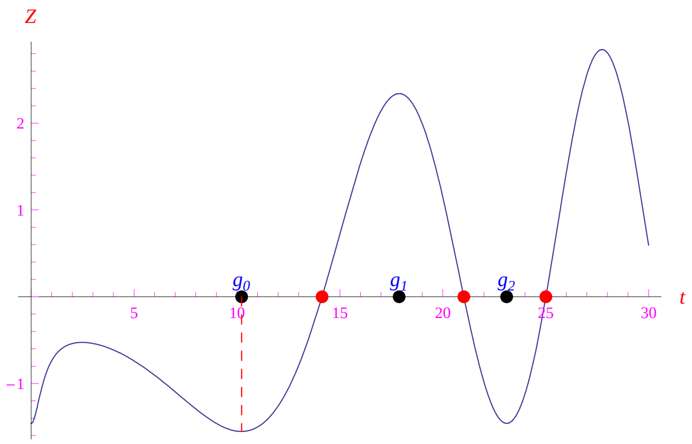

Figura 4: Ricerca di Gram points.

3 Il fenomeno di Lehmer

Il *fenomeno di Lehmer* consiste nell'esistenza di due zeri t_k e $t_{k'}$ estremamente vicini, che rende problematica la ricerca di punti di Gram. Ad esempio, ciò si verifica in un intorno destro di $t = 7004$, come vediamo dal grafico di fig. 6 e successivo ingrandimento:

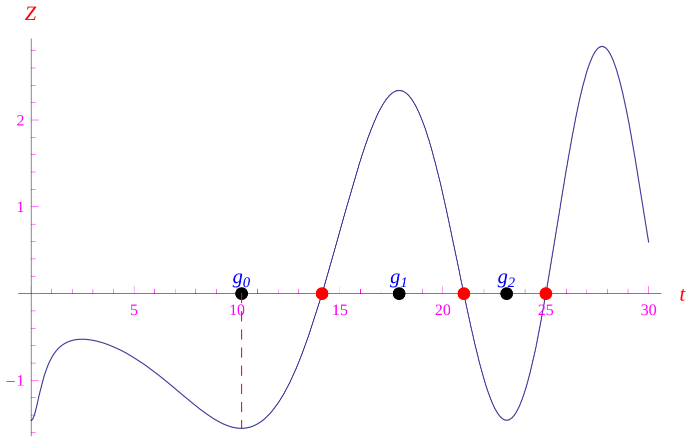

Figura 5: Ricerca di Gram points.

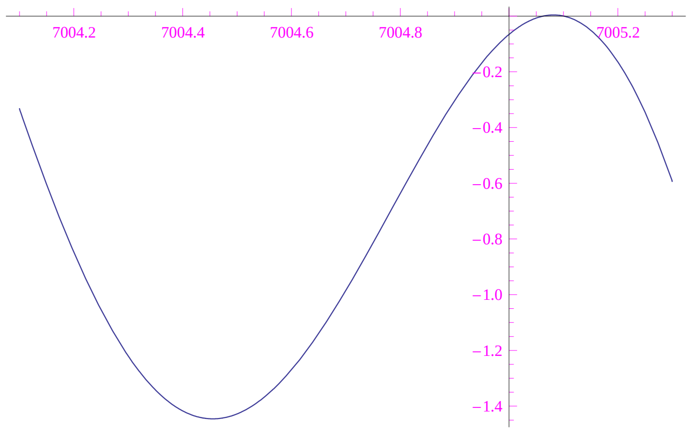

Figura 6: Il fenomeno Lehmer

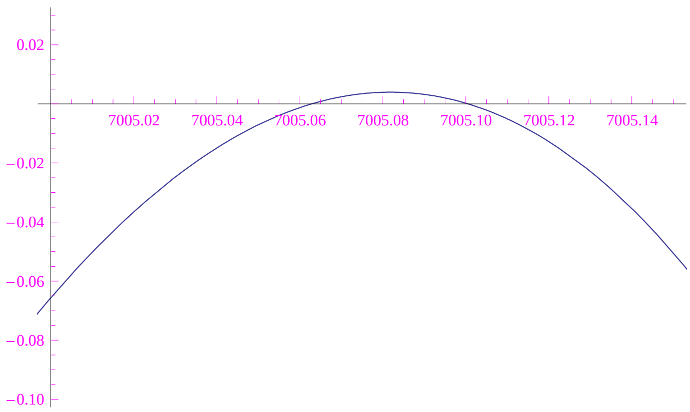

Figura 7: Ingrandimento del grafico precedente.