Esercizio di cinematica del punto

Marcello Colozzo

Esercizio 1 *(Testo tratto da [1]. La soluzione è nostra).*

L'indice luminoso di un galvanometro è fermo in una posizione che assumeremo come origine degli spostamenti. Mediante un opportuno impulso di corrente, si imprime ad esso una velocità u (corrispondente a $t = 0,\ s = 0$) e si constata che la legge del moto successivo può essere ben rappresentata con la formula

$$s(t) = A\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right),$$

essendo A,α, β opportune costanti positive (e $\alpha < \beta$). Si verifichi che la formula scritta rappresenta un moto in cui l'indice si allontana dapprima dall'origine, raggiunge poi una distanza massima s_m, indi si avvicina di nuovo all'origine per tendervi asintoticamente (per $t = +\infty$). Supponendo noti A, α, β, si calcoli:

1. *la velocità iniziale u;*
2. *la distanza massima s_m;*
3. *l'accelerazione corrispondente a $s = s_m$;*
4. *l'accelerazione iniziale;*
5. *la massima velocità (in valore assoluto) durante il moto di ritorno verso l'origine.*

Si consideri il caso particolare $A = 30\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 0.2\,\mathrm{s}^{-1}$, $\beta = 0.5\,\mathrm{s}^{-1}$. Si traccino per esso i grafici di $s(t)$ e $v(t)$ e si calcoli approssimativamente dopo quanto tempo l'indice potrà considerarsi praticamente tornato allo zero (cioè per es., a meno di $1\,\mathrm{mm}$).

Soluzione

Risulta

$$s(0) = 0, \ \lim_{t \to +\infty} s(t) = 0,$$

per cui ci aspettiamo il comportamento previsto dall'esercizio (l'indice ritorna asintoticamente nella posizione iniziale). Per essere più specifici, stabiliamo il segno della funzione $s(t)$:

$$s(t) > 0 \Longleftrightarrow e^{-\alpha t} > e^{-\beta t} \Longleftrightarrow e^{(\beta-\alpha)t} > 1 \underset{t>0}{\Longrightarrow} \beta - \alpha > 1,$$

concordemente al testo dell'esercizio. In altre parole, la funzione $s(t)$ è non negativa in $[0, +\infty)$. Ciò implica l'esistenza di un massimo assoluto in quanto la funzione è limitata superiormente. Studiamo allora il comportamento della derivata prima:

$$\dot{s}(t) = A\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right) = A\left(\beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t}\right) \tag{1}$$

Vediamo se esistono punti critici di $s(t)$ i.e. zeri di $\dot{s}(t)$:

$$\dot{s}(t) = 0 \Longleftrightarrow \beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t} = 0 \Longleftrightarrow (\alpha - \beta)\, t = \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Cioè
$$t_m = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) > 0$$
Studiamo il segno della derivata prima
$$\begin{aligned} \dot{s}(t) > 0 &\Longleftrightarrow \beta e^{-\beta t} > \alpha e^{-\alpha t} \Longleftrightarrow e^{(\alpha - \beta)t} > \frac{\alpha}{\beta} \\ &\Longleftrightarrow e^{(\beta - \alpha)t} < \frac{\beta}{\alpha} \underset{\beta - \alpha > 0}{\Longrightarrow} t < \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) = t_m \end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) > 0, \quad \forall t \in [0, t_m) \\ t > t_m \Longrightarrow \dot{s}(t) < 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che $s(t)$ è strettamente crescente in $[0, t_m)$ e strettamente decrescente in $(t_m, +\infty)$. Ciò implica che t_m è un punto di massimo relativo per la funzione. Quindi abbiamo il massimo relativo
$$s_m = s(t_m) = A \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\beta}{\beta - \alpha}} \right] \tag{2}$$
Cinematicamente, l'istante t_m è un istante di arresto con inversione del moto. Nell'intervallo $[0, t_m)$ è progressivo, mentre in $(t_m, +\infty)$ è regressivo. Geometricamente, il quesito 1 equivale a determinare il coefficiente angolare della retta tangente al diagramma orario nel punto $(0, 0)$. La velocità scalare a $t = 0$ è

$$u = |\dot{s}(0)| \underset{\dot{s}(0)>0}{=} \dot{s}(0) = A(\beta - \alpha),$$

che è appunto il coefficiente angolare della predetta tangente. Abbiamo così risposto ai quesiti 1 e 2. Per i rimanenti, dobbiamo determinare l'accelerazione ovvero la derivata seconda:
$$\ddot{s}(t) = A\left(\alpha^2 e^{-\alpha t} - \beta^2 e^{-\beta t}\right) \equiv a(t) \tag{3}$$
In tal modo abbiamo la risposta al quesito 4:

$$a(0) = A\left(\alpha^2 - \beta^2\right) < 0 \tag{4}$$

Rispondiamo al quesito 3:

$$a(t_m) = A \left[\alpha^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\beta}{\beta - \alpha}} - \beta^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} \right]$$

Quesito 5:
$$v(t) = |\dot{s}(t)| \quad \text{(velocità scalare)}$$
I punti critici della derivata prima sono gli zeri di $a(t)$ ovvero i punti di flesso del diagramma orario. Quindi

$$\alpha^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\beta}{\beta - \alpha}} - \beta^2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} = 0 \Longleftrightarrow e^{(\beta - \alpha)t} = \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2,$$

da cui

$$t=\frac{2}{\beta-\alpha}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=2t_m \tag{5}$$

Studiamo la concavità/convessità del diagramma orario:

$$a(t)>0\iff\alpha^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\beta}{\beta-\alpha}}-\beta^2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}>0\iff t>2t_m$$

Quindi il diagramma orario è concavo in $(2t_m,+\infty)$ e convesso in $(0,2t_m)$. Ne segue che $2t_m$ è un punto di flesso (a tangente obliqua). Il coefficiente angolare della retta tangente è il max valore (assoluto) della velocità:

$$v(2t_m)=A\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{2\alpha}{\beta-\alpha}}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{2\beta}{\beta-\alpha}}\right]$$

Per i dati numerici forniti dall'esercizio, si trova:

$$u=9\,\mathrm{cm}\,/\,\mathrm{s},\ t_m=3.05\,\mathrm{s}$$

mentre il diagramma orario e il grafico della derivata prima sono riportati nelle figg. 1-2.

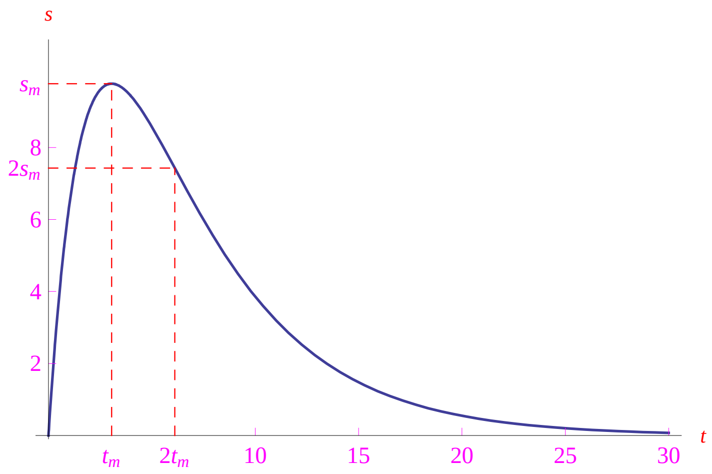

Figura 1: Esercizio 1. Diagramma orario.

Per rispondere all'ultimo quesito poniamo $s_*=1\,\mathrm{mm}$, quindi risolviamo numericamente

$$s(t)=s_*,$$

ottenendo

$$t_*\simeq 28.52\,\mathrm{s}$$

Ne concludiamo che dopo circa 29 s l'indice è tornato allo zero.

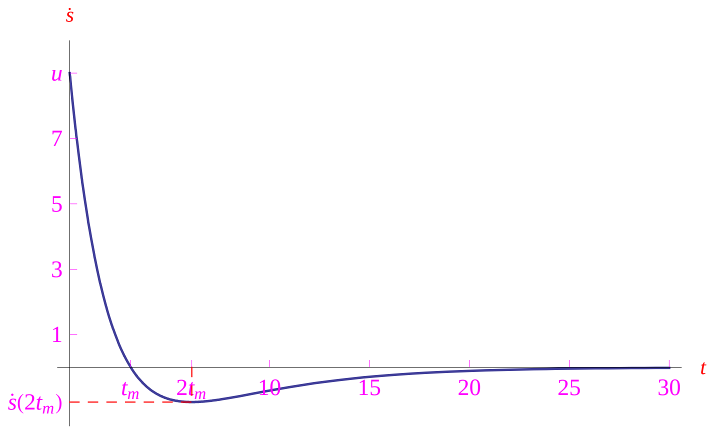

Figura 2: Esercizio **??**. Andamento della derivata prima dell'ascissa curvilinea.

Riferimenti bibliografici

[1] Mandò M., *Esercizi e problemi di Fisica. Volume I: Meccanica - Termologia*. Libreria universitaria, 1958.