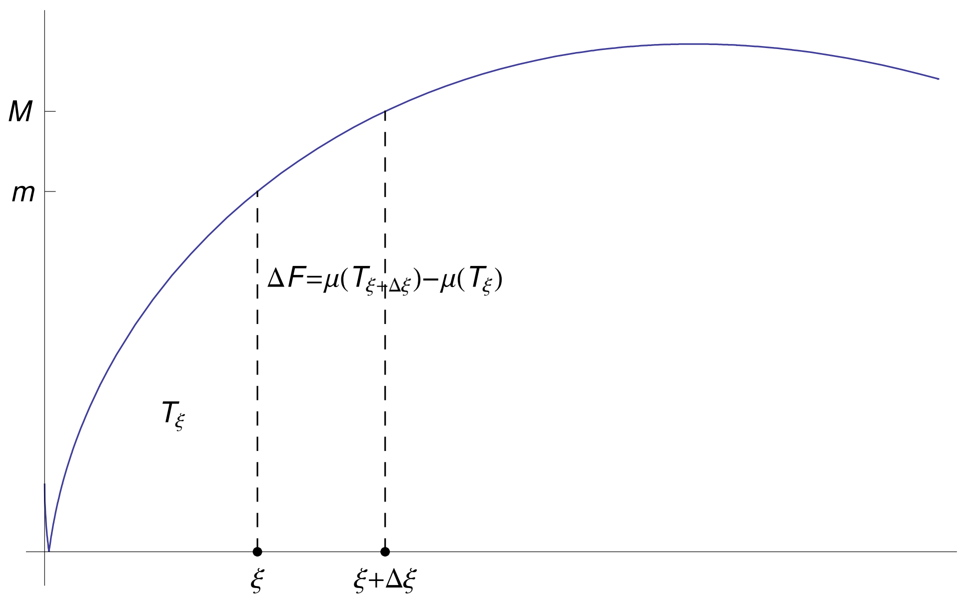
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

# Funzione primitiva e area del rettangoloide

**Marcello Colozzo**



Assegnata una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b)$, l'operazione di derivazione può essere interpretata attraverso l'applicazione di un *operatore di derivazione* $D$. In simboli:

$$D : f \to f' \tag{1}$$

Ci proponiamo di studiare l'invertibilità dell'operazione (1) che simbolicamente si scrive:

$$D^{-1} = f' \to f \tag{2}$$

Più in generale, assegnata una funzione $f$, ci proponiamo di determinare una funzione $F$ tale che $F' = f$.

**Definizione 1** *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, dicesi* ***funzione primitiva di*** *$f$ o semplicemente* ***primitiva****, una funzione $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$.*

**Proposizione 2** *Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ammette una primitiva, ne ammette infinite.*

**Dimostrazione.** Sia $F$ una primitiva di $f$, per cui

$$F'(x) = f(x)$$

Sia

$$G(x) = F(x) + c, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

cioè $G(x)$ differisce da $F(x)$ per una arbitraria costante additiva. Derivando:

$$G'(x) = F'(x),$$

onde l'asserto. ■

Dalla proposizione appena dimostrata segue che la primitiva di $f$ è determinata a meno di una costante additiva.

Ciò premesso, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e non negativa. Per un assegnato $\xi \in [a, b]$ è univocamente determinato il rettangoloide $T_\xi$ di base $[a, \xi]$ relativo a $f$:

$$T_\xi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq \xi, \ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

Per quanto visto in questa dispensa l'area di $T_\xi$ è:

$$\mu(T_\xi) = \int_a^\xi f(x)\, dx$$

Sia

$$\begin{aligned} F &: [a, b] \to \mathbb{R} \\ F(\xi) &= \int_a^\xi f(x)\, dx, \quad \forall \xi \in [a, b] \end{aligned} \tag{3}$$

In altri termini, la funzione $F$ associa ad ogni $\xi \in [a, b]$ l'area del rettangoloide $T_\xi$. Se $\Delta\xi > 0$ è un incremento tale che $(\xi + \Delta\xi) \in [a, b]$, il corrispondente incremento di $F$ è:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi) \\ &= \int_a^{\xi+\Delta\xi} f(x)\, dx - \int_a^\xi f(x)\, dx \\ &= \mu(T_{\xi+\Delta\xi}) - \mu(T_\xi), \end{aligned}$$

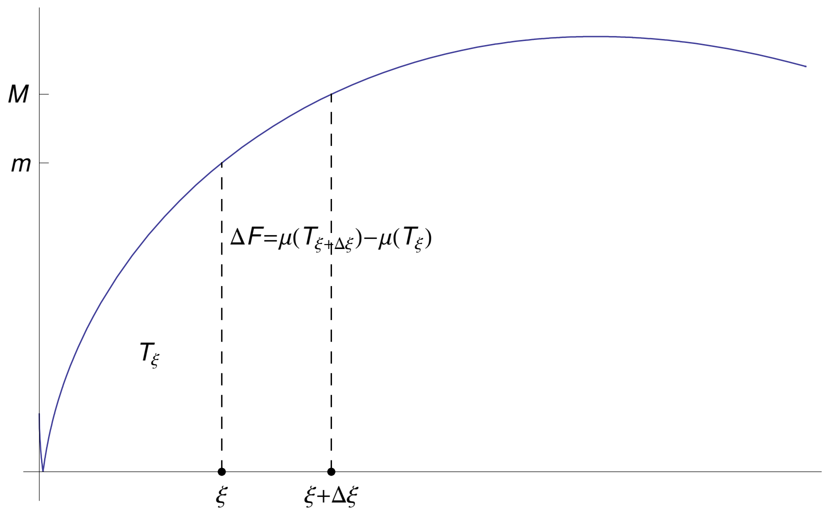



Figura 1: L'incremento della funzione (3) corrispondente all'incremento $\Delta\xi$, è l'area del rettangoloide di base $[\xi, \xi + \Delta\xi]$ relativo alla funzione $f$.

cioè $\Delta F$ è l'area del rettangoloide di base$[\xi, \xi + \Delta\xi]$, relativo a $f$, come mostrato in fig. 1.

Per ipotesi è $f$ continua in $[a, b]$, onde è dotata di minimo e massimo assoluti:

$$m = \min_{[a,b]} f, \quad M = \max_{[a,b]} f,$$

riuscendo:

$$m\Delta\xi \leq F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi) \leq M\Delta\xi \underset{\Delta\xi\neq 0}{\Longrightarrow} m \leq \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} \leq M$$

Per la continuità di $f$:

$$\frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi + \theta\Delta\xi), \quad (0 \leq \theta \leq 1) \tag{4}$$

È facile persuadersi che la (4) è valida anche per $\Delta\xi < 0$. Ridefinendo $\xi$ in $x$:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x + \theta\Delta x), \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

Inoltre

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \theta\Delta x) \underset{f \text{ è continua}}{=} f(x),$$

cioè

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

onde $F$ è una primitiva di $f$. Ne consegue che l'area del rettangoloide di base $[a, x]$ è una primitiva di $f$.

Tale risultato si generalizza a una funzione non negativa evidenziando, in tal modo, un legame tra il problema della ricerca di una primitiva di una funzione $f$ continua e quello della misura dell'area del rettangoloide relativo a $f$. Storicamente il problema della misura di un insieme di punti del piano determinò lo sviluppo del calcolo integrale.