Appunti di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Funzioni crescenti e decrescenti in un punto. Funzioni monotone in un intervallo

Sia f una funzione reale definita in un intervallo (a,b) non necessariamente limitato. Se f è crescente in (a,b):

$$\forall x', x'' \in (a,b)\,, \quad x' < x'' \Longrightarrow f(x') \leq f(x'') \tag{1}$$

Se f è decrescente in (a,b):

$$\forall x', x'' \in (a,b)\,, \quad x' < x'' \Longrightarrow f(x') \geq f(x'') \tag{2}$$

Ricordiamo che se le disuguaglianze a secondo membro delle rispettive implicazioni sono verificate in senso stretto, la funzione è *strettamente* crescente/decrescente.

Le condizioni precedenti si possono riscrivere nel seguente modo: comunque prendiamo $x_0 \in (a,b)$, se f è crescente in (a,b), dovrà aversi:

$$\begin{aligned} x < x_0 &\Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 &\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{aligned} \tag{3}$$

Se invece f è decrescente in (a,b)

$$\begin{aligned} x < x_0 &\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x < x_0 &\Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione

Definizione 1 *La funzione f è* **crescente** *in $x_0 \in (a,b)$ se*

$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in (a,b) \cap I(x_0) \Longrightarrow \begin{cases} x < x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases} \tag{5}$$

La funzione f è **decrescente** *in $x_0 \in (a,b)$ se*

$$\exists I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in (a,b) \cap I(x_0) \Longrightarrow \begin{cases} x < x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases} \tag{6}$$

In altri termini, la funzione f è crescente/decrescente in x_0, se le (3) (o 4) si verificano definitivamente intorno a x_0

Osservazione 2 *La definizione 1 esprime localmente la monotonia di una funzione. Di contro, le (1)-(2) hanno carattere non locale.*

È consuetudine asserire che nel caso di una disuguaglianza del tipo

$$x < x_0 \Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

la funzione è crescente *a sinistra di* x_0, mentre nel caso di

$$x > x_0 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

la funzione è crescente *a destra di* x_0. Analoghe conclusioni per la decrescenza. Ne segue che f è crescente/decrescente in x_0 se e solo se è crescente/decrescente a sinistra e a destra di x_0. Nel caso di un intervallo chiuso $[a, b]$, può accadere: 1) $x_0 = a$, 2) $x_0 = b$. Nel caso 1 f può essere crescente/decrescente solo a destra di x_0, mentre nel caso 2 solo a sinistra di x_0.

Osserviamo che se una funzione è crescente/decrescente in (a, b), lo è in ogni punto $x_0 \in (a, b)$. Ma non è vero il viceversa. Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{7}$$

È facile persuadersi che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x = 0$. Il grafico oscilla tra l'asse x e la retta $y = x$, come vediamo in fig. **??**

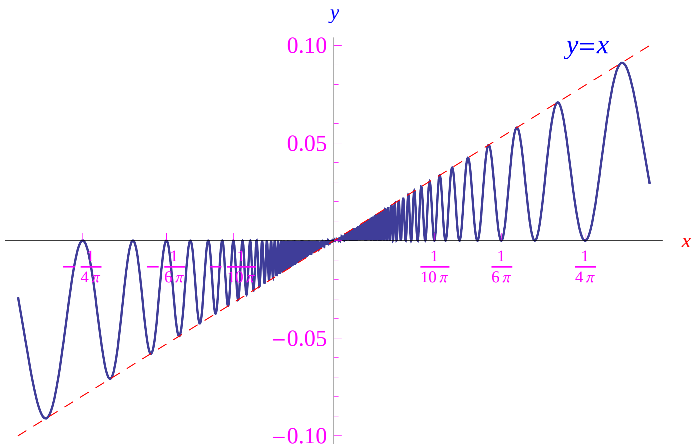

Figura 1: Grafico della funzione 7.

Riesce

$$\begin{aligned} x < 0 &\Longrightarrow f(x) \leq 0 \\ x > 0 &\Longrightarrow f(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Più precisamente, $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Le (8) che la funzione è crescente in x_0 (ma non in senso stretto). Fissiamo la nostra attenzione sull'insieme degli zeri non banali:

$$\left\{ x_k = \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\},$$

che è numerabile ed ha $x = 0$ per punto di accumulazione. Ne segue che in ogni intorno di $x = 0$ cadono infiniti zeri non banali, e quindi infiniti punti in cui è $f(x) \neq 0$. Quindi non esiste alcun intorno del predetto punto in cui f è crescente.

Una generalizzazione dell'esempio precedente è dato dalla funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

avendosi anche qui

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Per quanto visto nell'esempio precedente, il grafico di $f(x) - x$ oscilla tra l'asse x e la retta $y = x$, per cui il grafico di f oscilla tra le rette $y = x$ e $y = 2x$, come vediamo in fig. 2.

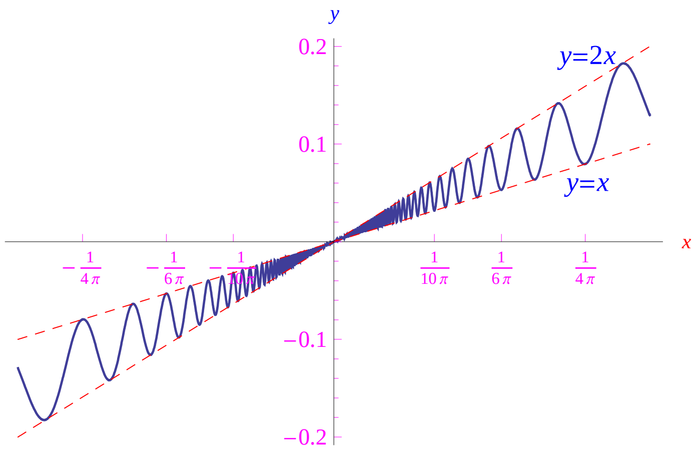

Figura 2: Grafico della funzione 9.

Riesce

$$\begin{aligned} x < 0 &\Longrightarrow f(x) < 0 \\ x > 0 &\Longrightarrow f(x) > 0 \end{aligned} \tag{10}$$

onde la funzione è strettamente crescente in $x = 0$. Tuttavia, in base a considerazioni analoghe a quelle dell'esempio precedente, non esiste alcun intorno di $x = 0$ in cui la funzione è strettamente crescente.