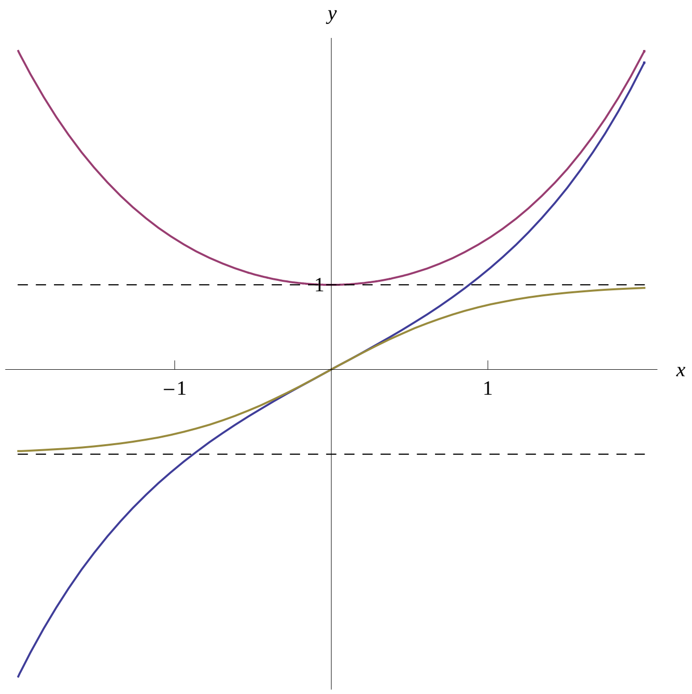
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

Matematica Open Source – http://www.extrabyte.info

Funzioni iperboliche e funzioni iperboliche inverse

Marcello Colozzo



1 Funzioni iperboliche

Seno iperbolico

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

Coseno iperbolico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{2}$$

Tangente iperbolica

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} \tag{3}$$

L'insieme di esistenza di tali funzioni è $\mathbb{R}$.

Parità

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \Longrightarrow \text{funzione dispari} \\ \cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \Longrightarrow \text{funzione pari} \\ \tanh(-x) &= \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = -\tanh x \Longrightarrow \text{funzione dispari} \end{aligned}$$

Da ciò segue che il grafico di $\cosh x$ è simmetrico rispetto all'asse y, mentre il grafico di $\sinh x$ e $\tanh x$ è simmetrico rispetto all'origine, per cui passa per tale punto. Infatti, $\sinh 0 = \tanh 0 = 0$, mentre $\cosh 0 = 1$.

Segno

$$\begin{aligned} &\sinh x > 0 \Longleftrightarrow e^x > e^{-x} \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty) \\ &\cosh x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\tanh x > 0 \Longleftrightarrow \sinh x > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

Monotonia

e^x, e^{-x} strettamente crescenti $\Longrightarrow \sinh x$ è strettamente crescente. Idem per la funzione $\tanh x$. Per quanto riguarda $\cosh x$, utilizzando alcune proprietà della funzione esponenziale, si dimostra che è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Da ciò segue che $x = 0$ è punto di minimo:

$$\min \cosh x = \cosh 0 = 1 \tag{4}$$

Ne consegue che mentre $\sinh x$ e $\tanh x$ sono invertibili, $\cosh x$ lo è solo localmente.

Ricerca del codominio.

Iniziamo con $\sinh x$. Dobbiamo risolvere l'equazione nell'incognita x

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \tag{5}$$

Cioè

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Risolvendo rispetto a e^x:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \tag{6}$$

La soluzione $y - \sqrt{y^2 + 1}$ è inaccettabile, giacchè il secondo membro di (6) deve essere tale che il primo membro sia positivo. Quindi:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \tag{7}$$

Riesce

$$y+\sqrt{y^2+1}>0, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

Ne consegue che il codominio di $\sinh x$ è $\mathbb{R}$. Per la funzione $\tanh x$, si ha dalla sua definizione: $|\tanh x|<1$, onde il suo codominio è contenuto in $(-1,1)$. Per esplicitarlo, risolviamo rispetto a x l'equazione:

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y \Longleftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=y \Longleftrightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$$

$\forall y \in (-1,1)$, $\frac{1+y}{1-y}>0$, per cui

$$x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), \quad y \in (-1,1)$$

Ne consegue che il codominio di $\tanh x$ è $(-1,1)$. Passiamo a $\cosh x$. Qui è $\min \cosh x = 1$, onde il codominio è contenuto in $[1,+\infty)$. Risolviamo:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=y \Longleftrightarrow e^{2x}-2ye^x+1=0,$$

da cui

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1} \tag{8}$$

Per quanto precede, deve essere $y\geq 1$, per cui $y\pm\sqrt{y^2-1}>0$. Pertanto, entrambe le soluzioni sono accettabili:

$$x=\ln\left(y\pm\sqrt{y^2-1}\right) \tag{9}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} y-\sqrt{y^2-1} &= \frac{y+\sqrt{y^2-1}}{y+\sqrt{y^2-1}}\left(y-\sqrt{y^2-1}\right) \\ &= \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}, \end{aligned}$$

onde:

$$x=\pm\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) \tag{10}$$

Da ciò vediamo che il codominio di $\cosh x$ è $[1,+\infty)$. In fig. 1 riportiamo il grafico delle funzioni iperboliche.

Dalle (1)-(2) otteniamo l'identità fondamentale:

$$\cosh^2 x-\sinh x^2=1 \tag{11}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \sinh(a+b) &= \sinh a\cosh b+\cosh a\sinh b \\ \cosh(a+b) &= \cosh a\cosh b+\sinh a\sinh b \end{aligned} \tag{12}$$

Le relazioni (1)-(2) richiamano le formule trigonometriche con il "segno sbagliato":

$$\begin{cases} \cos^2 x+\sin^2 x=1 \\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b \\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \end{cases}, \tag{13}$$

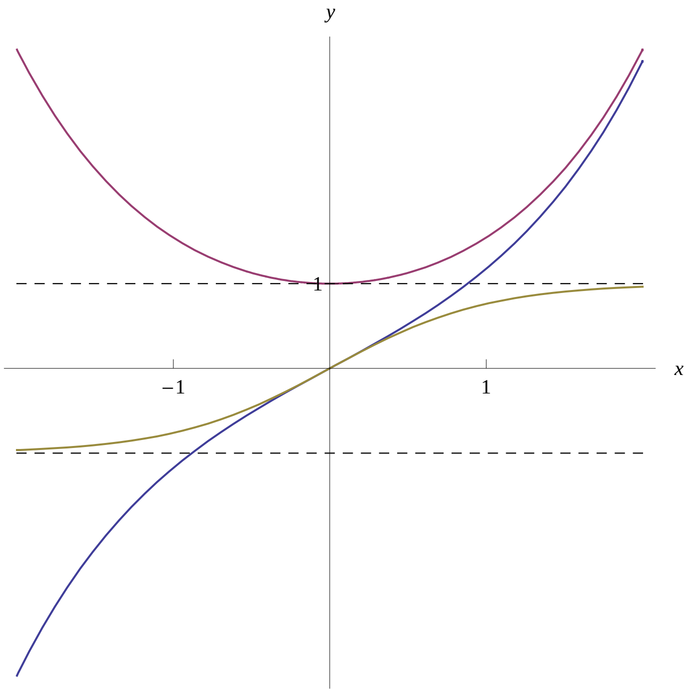


Figura 1: Diagramma cartesiano delle funzioni iperboliche. Il grafico di $\cosh x$ è noto come *catenaria*, poichè è la configurazione di equilibrio di una catena sospesa per gli estremi e sottoposta al solo campo gravitazionale.

da qui la denominazione *seno e coseno iperbolico.* Il termine *iperbolico* deriva, invece, dalla traiettoria descritta da un punto che compie un moto piano di equazioni orarie[1]:

$$x(t) = \cosh t, \quad y(t) = \sinh t, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{14}$$

che compongono una rappresentazione parametrica della traiettoria del punto. Possiamo svincolarci dal parametro t quadrando e sommando:

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{15}$$

che è l'equazione cartesiana della traiettoria. Per essere più precisi, iniziamo con l'osservare che l'intervallo base nella (14) è $[0, +\infty)$, giacchè t è il tempo. È facile persuadersi che in questo caso la traiettoria descritta dal punto è un arco dell'iperbole equilatera (15) contenuta nel primo quadrante (cfr. fig. 2).

Volendo rappresentare il ramo di iperbole contenuto nel semipiano $x > 0$, dobbiamo far variare il parametro t da $-\infty$ a $+\infty$ (cfr. fig. 3).

2 Funzioni iperboliche inverse

$\sinh x$ e $\tanh x$ sono strettamente monotone, quindi invertibili. La funzione $\cosh x$ è, invece, invertibile solo localmente in quanto è strettamente crescente in $[0, +\infty)$ e strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$. Per la funzione $\sinh x$ abbiamo risolto la (5) ottenendo:

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right),$$

che fornisce l'espressione analitica dell'inversa di $\sinh x$. Quest'ultima si chiama **arcoseno iperbolico** o **settore seno iperbolico** e si indica con uno dei simboli $\text{arcsinh}x$, $\text{settsinh}x$. Quindi:

$$\text{arcsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \tag{16}$$

[1] Le grandezze - posizione e tempo - sono adimensionalizzate.

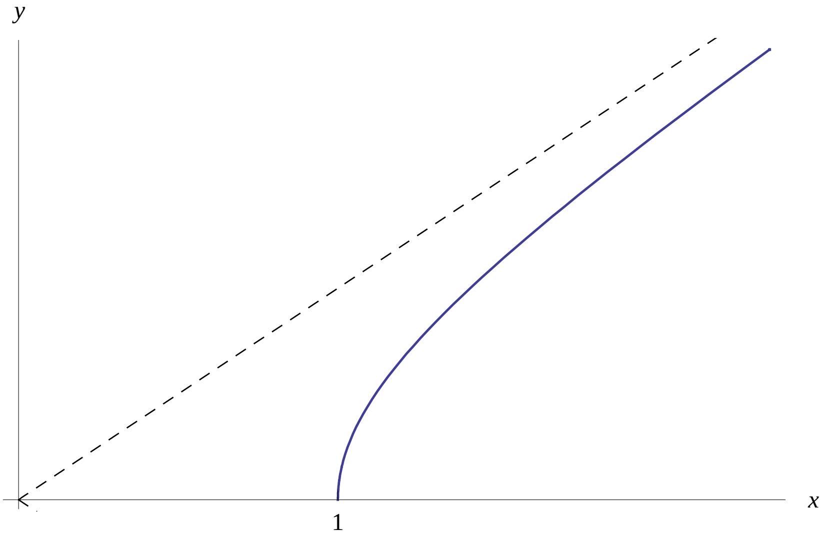


Figura 2: Traiettoria della particella per $t \in [0, +\infty)$. A $t = 0$ la particella ha coordinate cartesiane $(1, 0)$, per poi spostarsi progressivamente lungo l'arco di iperbole $x^2 - y^2 = 1$ contenuto nel primo qudarante.

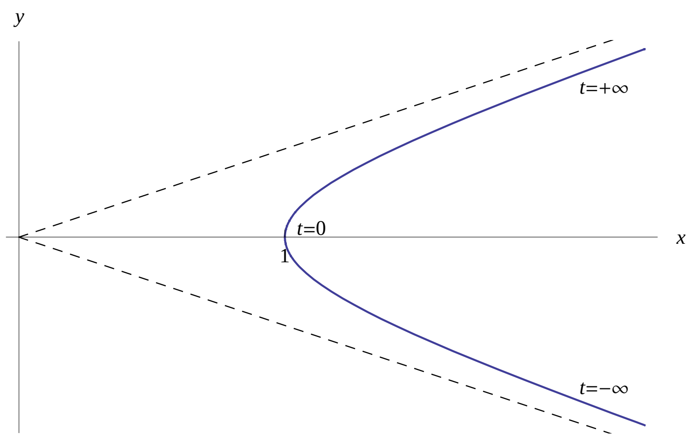


Figura 3: Traiettoria della particella per $t \in (-\infty, +\infty)$ A $t = -\infty$ la particella ha coordinate cartesiane $(x, y) \to (+\infty, -\infty)$, per poi spostarsi progressivamente lungo il ramo di iperbole $x^2 - y^2 = 1$ contenuto nel semipiano $x > 0$, raggiungendo il punto all'infinito $(x, y) \to (+\infty, +\infty)$ per $t \to +\infty$.

che è definita in $\mathbb{R}$. Analogamente per $\tanh x$ abbiamo l'inversa denominata **arcotangente iperbolico** o settore tangente iperbolico e si indica con $\mathrm{arctanh} x$ o con $\mathrm{settanh} x$.

$$\mathrm{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \tag{17}$$

Riguardo al $\cosh x$ si adotta la convenzione di invertire la funzione in $[0, +\infty)$. Ciò implica che nella (10) va preso il segno superiore:

$$x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right), \quad y \geq 1$$

Abbiamo così l'**arcocoseno iperbolico** o **settore tangente iperbolico**:

$$\mathrm{arccosh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right),$$

che è definita in $[1, +\infty)$. In fig. 4 riportiamo il grafico delle funzioni iperboliche inverse.

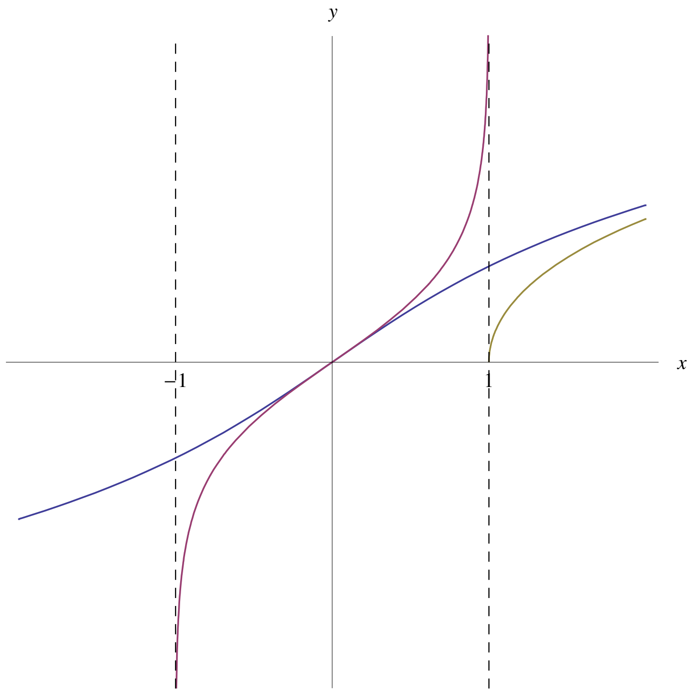


Figura 4: Grafico delle funzioni iperboliche inverse.