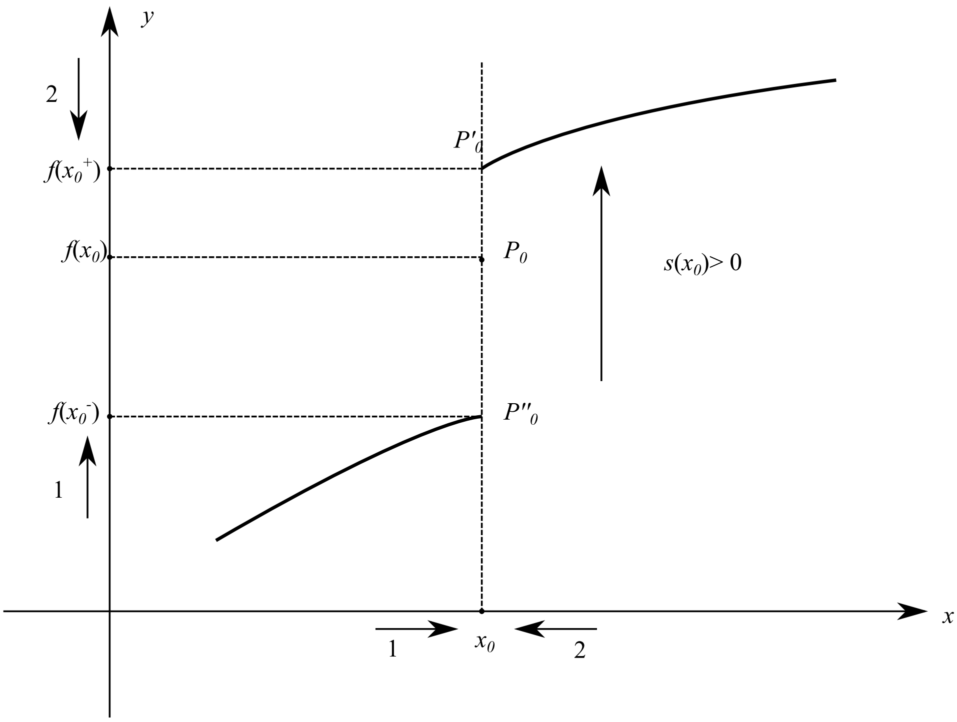
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma} \left(X dx + Y dy + Z dz\right)$$

Classificazione dei punti di discontinuità

Marcello Colozzo



1 Punti di discontinuità

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathcal{D}(X)$.

Definizione 1 *La funzione f è* ***discontinua*** *in x_0 se* ***non*** *risulta:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se f è discontinua in x_0, significa che i casi possibili sono:

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$, $l \in \mathbb{R}$
2. $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Nel caso 1 si dice che x_0 è un **punto di discontinuità eliminabile** (o **rimovibile** o **apparente**). Tale denominazione si giustifica osservando che la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq x_0 \\ l, & \text{se } x = x_0 \end{cases}, \tag{1}$$

è continua in x_0. A questo punto, possono presentarsi due sottocasi. Il primo è quello in cui la funzione f non è definita in x_0; si dirà quindi che la funzione (1) è ottenuta *prolungando per continuità la funzione f*. Nel secondo, invece, diremo che la funzione (1) è ottenuta *modificando il valore di f* in x_0.

Nei casi 2 e 3, si dice che x_0 è una **punto di discontinuità non eliminabile**.

Esempio 2 *La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ha in $x = 0$ una discontuinità eliminabile. Infatti, sappiamo che:*

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

per cui la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases},$$

è continua in $x = 0$.

Le discontinuità non eliminabili si classificano in:

A. Discontinuità di prima specie.

B. Discontinuità di seconda specie o **singolarità.**

Esaminiamole separatamente.

1.1 Discontinuità di prima specie

In questo caso la funzione è convergente a sinistra e a destra di x_0. Cioè:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in \mathbb{R} - \{l_1\}$$

Osservazione 3 *È spesso utilizzata la notazione:*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f\left(x_0^-\right), \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f\left(x_0^+\right)$$

La grandezza

$$s(x_0) = l_2 - l_1 \neq 0,$$

è il **salto di discontinuità** della funzione in x_0. Se la funzione è definita in x_0 e riesce:

$$f(x_0) = \frac{l_1 + l_2}{2},$$

diremo che x_0 è una **discontinuità simmetrica**. Il grafico di una funzione che ha una discontinuità di prima specie in x_0, presenta un'interruzione in corrispondenza della retta di equazione $x = x_0$. Il valore assoluto $|s(x_0)|$ del salto $s(x_0)$ è la misura (lunghezza) del segmento $\overline{P_0' P_0''}$, essendo $P_0'\left(x_0, f\left(x_0^+\right)\right)$ e $P_0''\left(x_0, f\left(x_0^-\right)\right)$. Nel caso di una discontinuità simmetrica, il punto $P_0(x_0, f(x_0))$ è il punto medio del segmento $\overline{P_0' P_0''}$. Consultare la fig. 1.

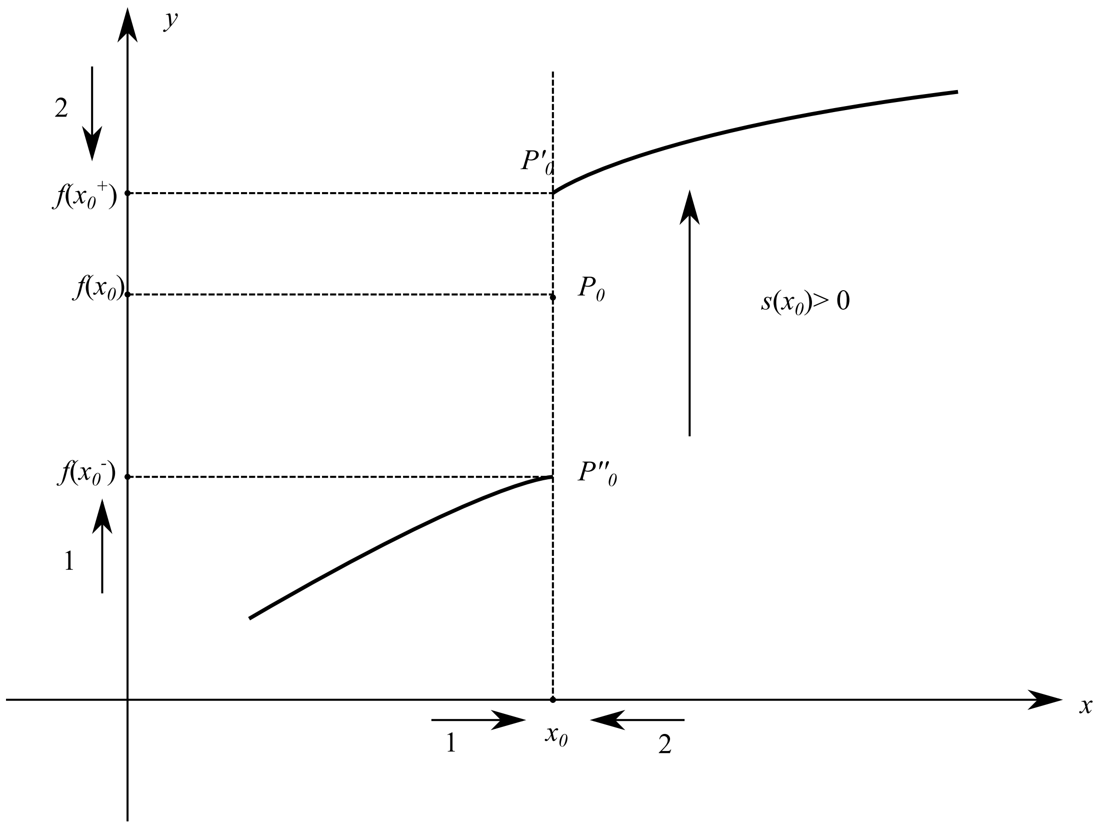


Figura 1: Grafico di una funzione che ha in x_0 una discontinuità di prima specie. In questo caso non si tratta di una discontinuità simmetrica, giacchè P_0 non è il punto medio del segmento $\overline{P_0' P_0''}$. Il salto di discontinuità è $s(x_0) > 0$.

Esempio 4 *La funzione signum (esempio ??) ha in $x = 0$ una discontinuità finita, in quanto:*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$$

Il salto di discontinuità è:

$$s(0) = +1$$

Si tratta manifestamente di una discontinuità simmetrica.

Esempio 5 *Mostriamo che la funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$ ha una discontinuità di prima specie in $x = 0$.*
Esplicitando il valore assoluto, si trova:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & se\ x > 0 \\ x-1, & se\ x < 0 \end{cases},$$

onde:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

Il salto di discontinuità è $s(0) = 2$. Il grafico è riportato in fig. 2.

1.2 Discontinuità di seconda specie

Sono tutte e sole le discontinuità non eliminabili che non siano di prima specie. Quindi si verifica una delle circostanze seguenti:

1. $\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
2. $\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x)$
3. $\nexists \lim_{x\to x_0^\pm} f(x)$
4. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \mp\infty$
5. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

Se x_0 è un punto di discontinuità di seconda specie, e ad esempio, non esiste il limite sinistro di f per $x \to x_0$, in ogni intorno sinistro di x_0 la funzione è infinitamente oscillante, nel senso che compie infinite oscillazioni che non si smorzano per $x \to x_0$.

Esempio 6 *Determiniamo i punti di discontinuità della funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & se\ \ x < 0 \\ \sin 200x, & se\ x \geq 0 \end{cases}, \tag{2}$$

il cui grafico è riportato in fig. 3. In $x = 0$ la funzione è non regolare a sinistra, giacchè:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin\frac{1}{x},$$

mentre è continua a destra di tale punto, avendosi:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin 200x = 0^+$$

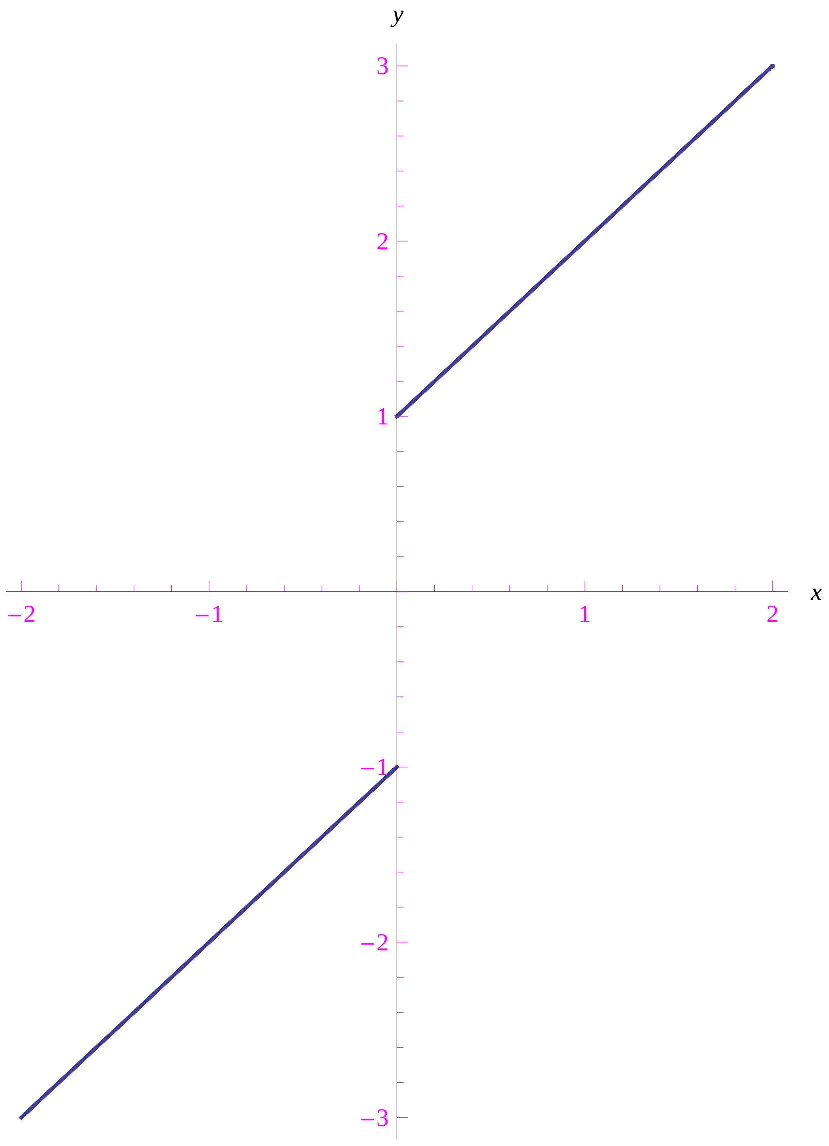


Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = x + \frac{|x|}{x}$.

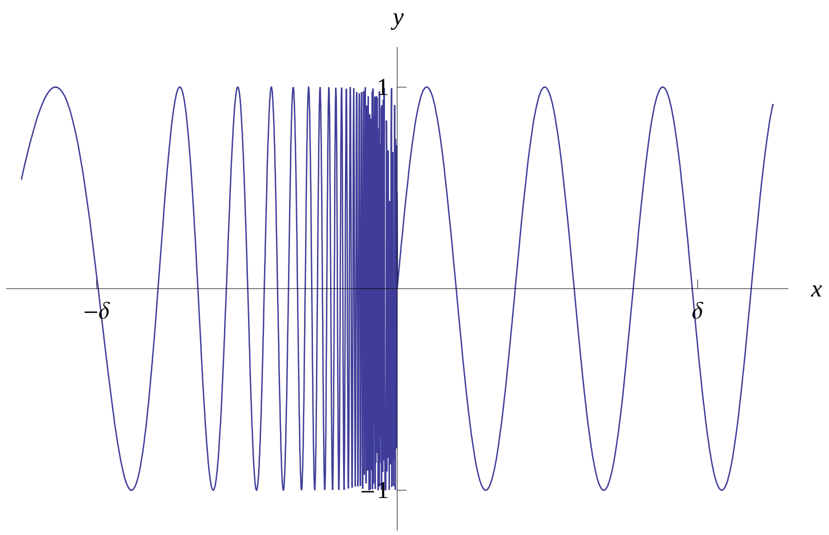


Figura 3: Grafico della funzione (**??**)

1.3 Funzioni generalmente continue

Sia $f : X \to \mathbb{R}$, dove X è un intervallo (limitato o illimitato). Definiamo:

$$S = \{\xi \in \mathcal{D}(X) \mid \xi \text{ è punto di discontinuità per } f\}$$

Sussiste la seguente definizione:

Definizione 7 *f è **generalmente continua** in X se $S \neq \emptyset$ e $\mathcal{D}(S) = \emptyset$, cioè se l'insieme dei punti di discontinuità è privo di punti di accumulazione al finito.*

Conclusione 8 *Se f è generalmente continua in X, in ogni intervallo non vuoto $(a, b) \subset X$, esiste al più un numero finito di punti di discontinuità.*

Esempio 9 *Consideriamo la funzione **parte intera di** x, $f(x) = [x]$, dove $[x]$ denota la parte intera del numero reale x. Pertanto:*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f : x \to [x]$$

Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} x &\in [n-1, n) \Longrightarrow [x] = n - 1 \\ x &\in (-n, -n+1] \Longrightarrow [x] = -n + 1 \end{aligned}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n:

$$n = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x \in [0, 1) \Longrightarrow [x] = 0 \\ x \in (-1, 0] \Longrightarrow [x] = 0 \end{cases}$$
$$n = 2 \Longrightarrow \begin{cases} x \in [1, 2) \Longrightarrow [x] = 1 \\ x \in (-2, -1] \Longrightarrow [x] = -1 \end{cases}$$
$$n = 3 \Longrightarrow \begin{cases} x \in [2, 3) \Longrightarrow [x] = 2 \\ x \in (-3, -2] \Longrightarrow [x] = -2 \end{cases}$$
$$\ldots,$$

da cui segue il grafico riportato in fig.4. Risulta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$. Riguardo alla continuità, ogni punto di ascissa intera è punto di discontinuità di prima specie. Sia:

$$x_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \mid [x_0] = x_0$$

Distinguiamo i due casi:

- $x_0 > 0$

  Qui è (fig. 5):

  $$\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1, \quad \lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0,$$

  cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = 1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0 = [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a destra.

- $x_0 < 0$

  Qui è (fig. 6):

  $$\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0, \quad \lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0 + 1,$$

  cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = 1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 = [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a sinistra.

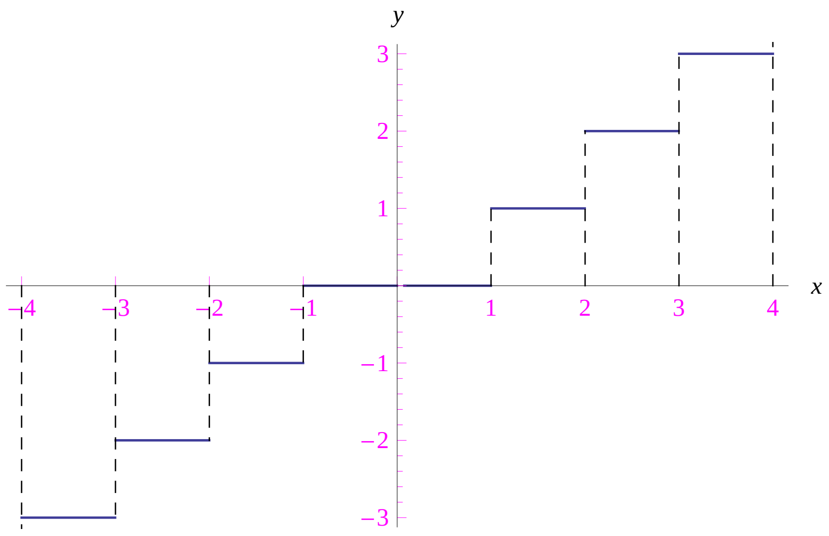


Figura 4: Grafico della funzione *parte intera di x*. È l'unione di un numero infinito di segmenti. Precisamente il segmento aperto $(-1, 1)$, infiniti segmenti semiaperti a destra e infiniti segmenti semiaperti a sinistra.

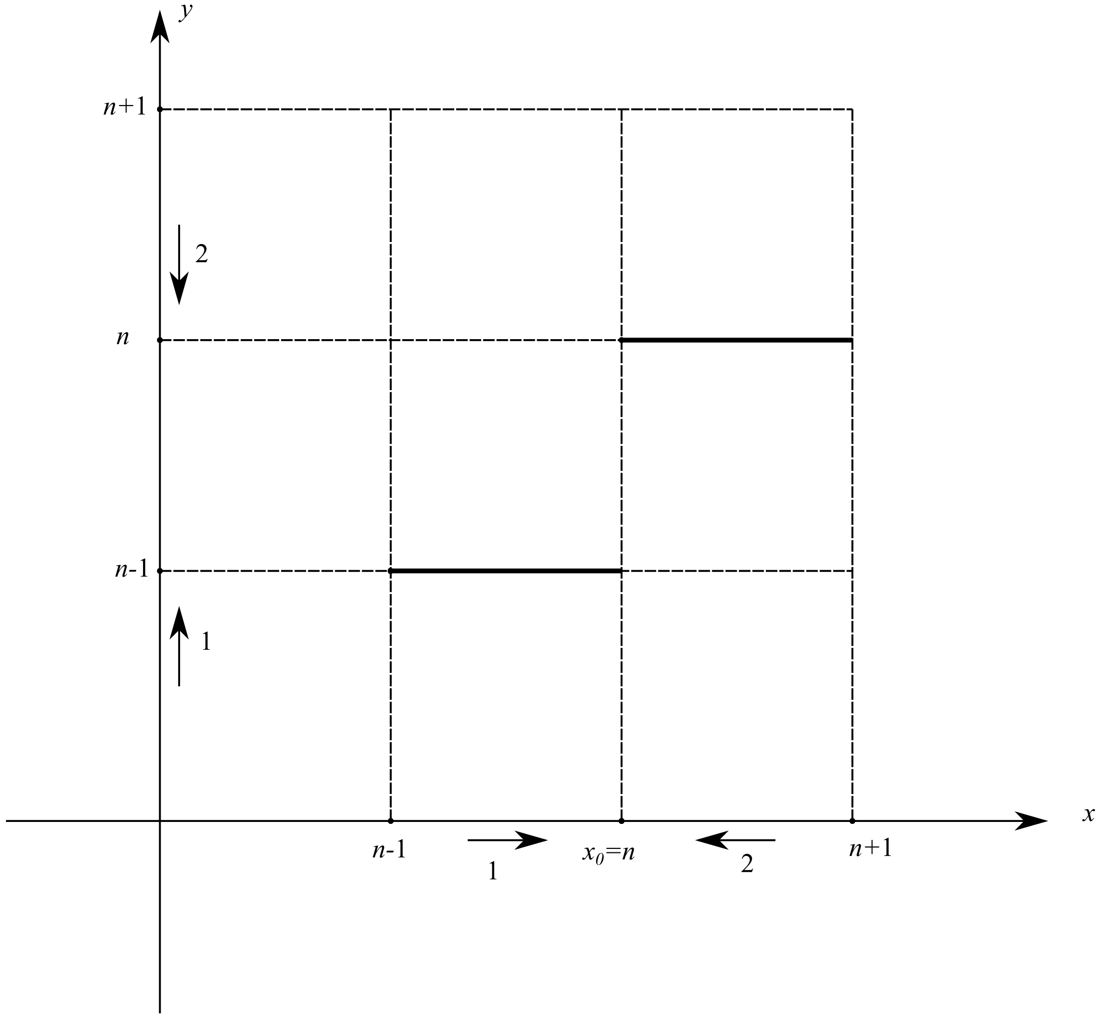


Figura 5: Il punto $x_0 > 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $[x]$.

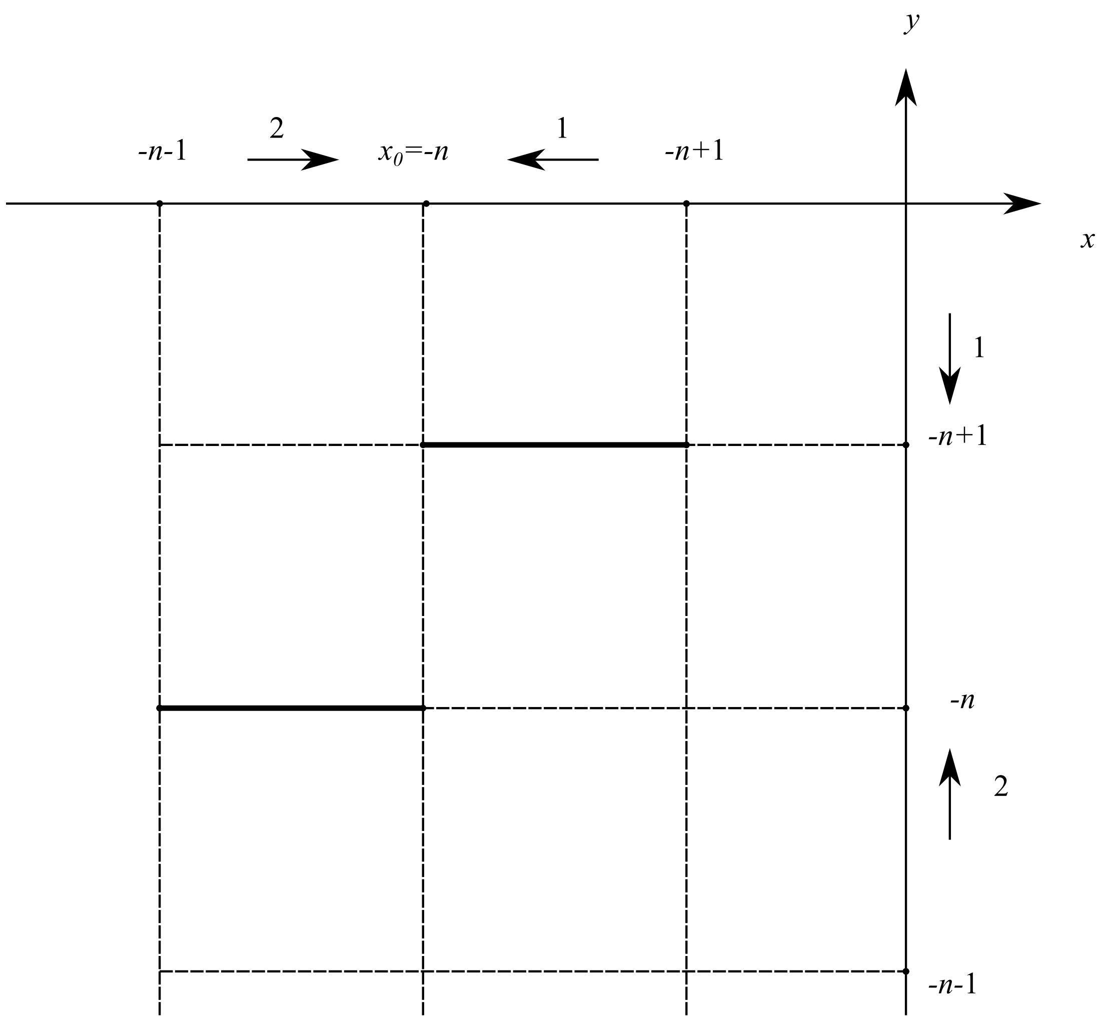


Figura 6: Il punto $x_0 < 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $[x]$.

Ne concludiamo che la funzione $[x]$ è generalmente continua. L'insieme dei punti di discontinuità è $\mathbb{N} - \{0\}$.

Esercizio 10 *Determinare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = x - [x]$.*

Soluzione. Se $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in [n-1, n) &\Longrightarrow f(x) = x - (n-1) \\ x \in (-n, -n+1] &\Longrightarrow f(x) = x - (-n+1) \end{aligned}$$

Esplicitiamo alcuni valori di n:

$$\begin{aligned} n = 1 &\Longrightarrow \begin{cases} x \in [0,1) \Longrightarrow f(x) = x \\ x \in (-1,0] \Longrightarrow f(x) = x \end{cases} \\ n = 2 &\Longrightarrow \begin{cases} x \in [1,2) \Longrightarrow f(x) = x - 1 \\ x \in (-2,-1] \Longrightarrow f(x) = x + 1 \end{cases} \\ n = 3 &\Longrightarrow \begin{cases} x \in [2,3) \Longrightarrow f(x) = x - 2 \\ x \in (-3,-2] \Longrightarrow f(x) = x + 3 \end{cases} \\ &..., \end{aligned}$$

da cui segue il grafico riportato in fig.7. Riguardo alla continuità, ogni punto di ascissa intera è punto

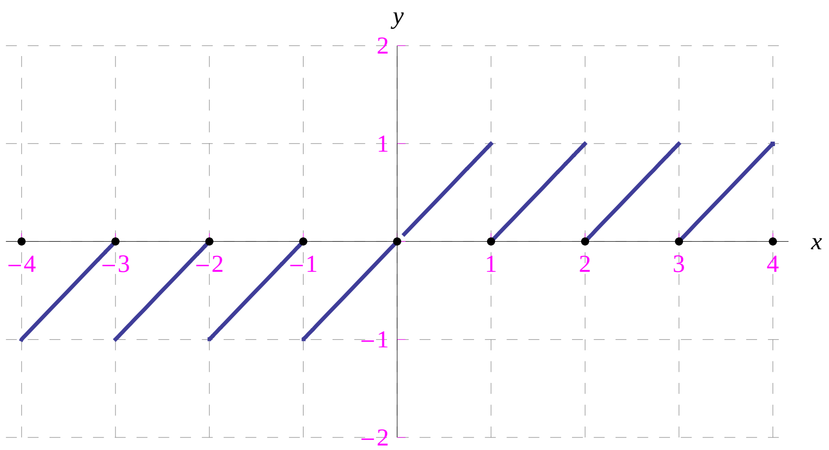


Figura 7: Grafico della funzione $f(x) = x - [x]$

di discontinuità di prima specie. Sia:

$$x_0 \in \mathbb{R} - \{0\} \mid [x_0] = x_0$$

Distinguiamo i due casi:

- $x_0 > 0$
  Qui è (fig. 8):
  $$\lim_{x \to x_0^-} (x - [x]) = 1^-, \ \lim_{x \to x_0^+} (x - [x]) = 0^+,$$
  cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = -1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \to x_0^+} (x - [x]) = 0 = x_0 - [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a destra.

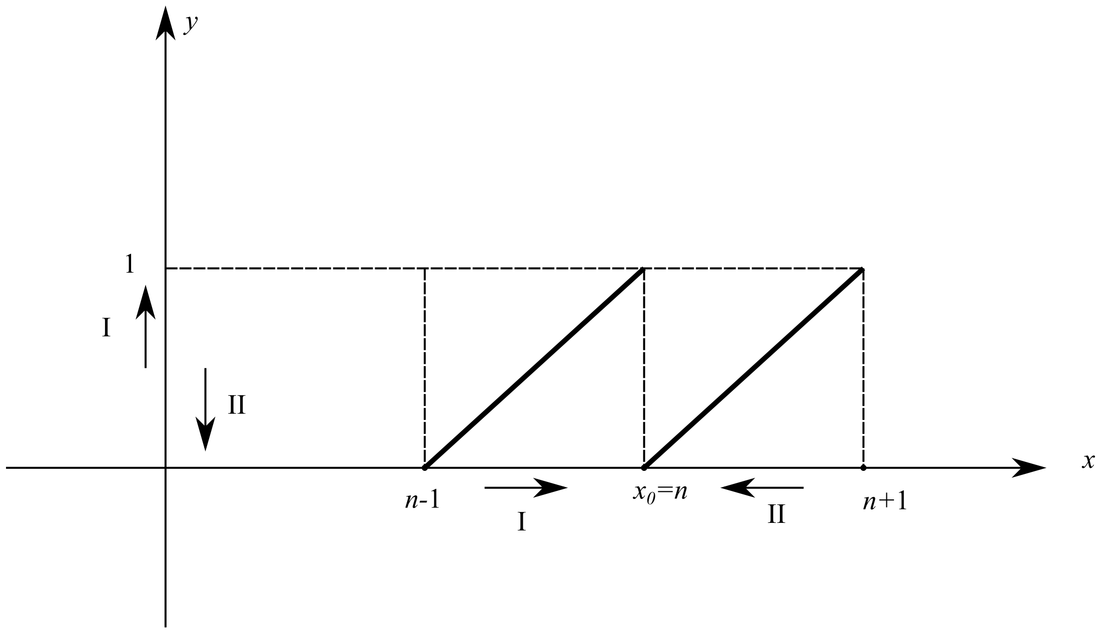


Figura 8: Il punto $x_0 > 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $x - [x]$.

- $x_0 < 0$

  Qui è (fig. 9):

$$\lim_{x \to x_0^-} (x - [x]) = 0^-, \ \lim_{x \to x_0^+} (x - [x]) = -1^+,$$

  cioè una discontinuità di prima specie. Il salto è $s(x_0) = -1$. Inoltre, avendosi $\lim_{x \to x_0^-} (x - [x]) = 0 = x_0 - [x_0]$, si ha che in x_0 la funzione è continua a sinistra.

Ne concludiamo che la funzione $x - [x]$ è generalmente continua. L'insieme dei punti di discontinuità è $\mathbb{N} - \{0\}$.

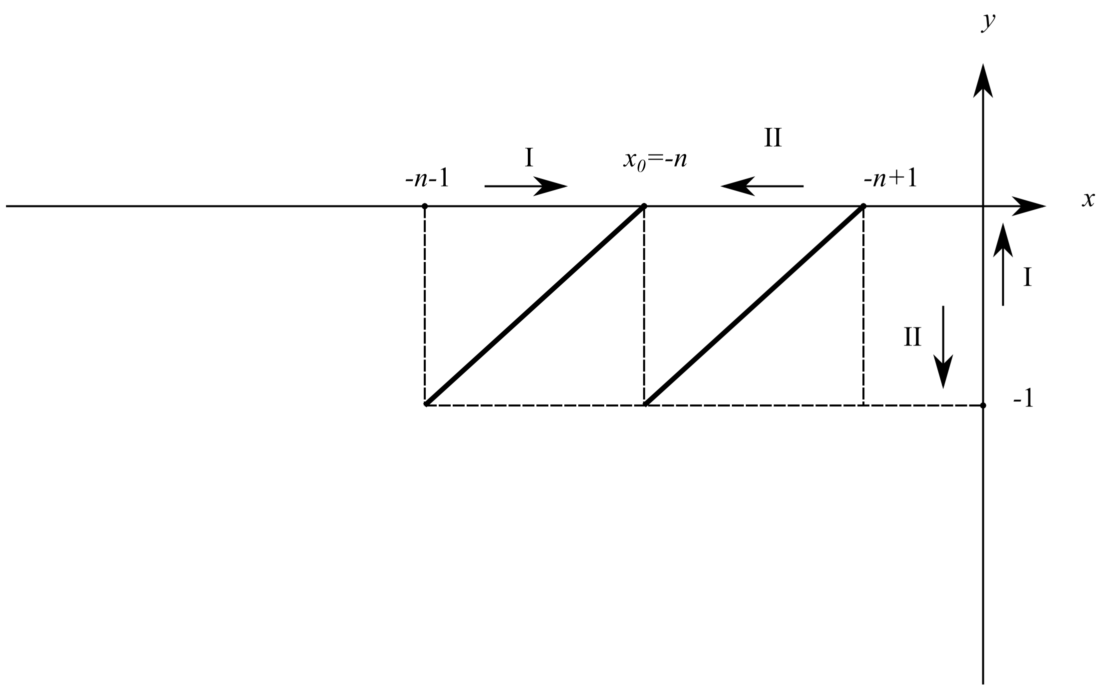


Figura 9: Il punto $x_0 < 0$ è di discontinuità di prima specie per la funzione $x - [x]$.